

Los elementos esenciales de la geometría: Haciendo y midiendo polígonos

Capítulo 1

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Explicar cómo las matemáticas pueden ser usadas para modelar situaciones reales

Describir las diferencias entre un mapa plano y uno en forma de globo como modelos del mundo

Mencionar la diferencia entre cantidades continuas y discretas

Describir qué es una unidad de medida y explicar por qué debe ser constante.

Medir una longitud dada con una unidad dada.

1.1 Midiendo longitudes

Puedes pensar en la geometría, como el lado visual de las matemáticas. Trata con figura, forma y tamaño. Comenzamos este libro observando cuidadosamente algunas ideas fundamentales y sorprendentemente simples en las cuales está basada la geometría. Realmente el entender estas pocas y simples ideas es la llave a esta parte poderosa de las matemáticas.

Anteriormente en **MATH Connections** usaste geometría para visualizar algunas de las otras cosas que estabas haciendo. Por ejemplo, aprendiste a usar geometría coordenada para crear gráficas de funciones y ecuaciones. También usaste diagramas de árbol para visualizar los procesos de enumeración. Uno de los roles de la geometría es el proveer dibujos que nos ayuden a entender algunas otras partes de las matemáticas. Un dibujo frecuentemente nos da un rápido entendimiento intuitivo de una situación, la cual puede ser más precisa por una expresión simbólica o un cómputo exacto. La conexión entre las figuras geométricas y el álgebra o la aritmética es la medición. Cuando medimos una figura geométrica, conseguimos números. Podemos hacer aritmética con los números o conectarlos en una ecuación algebraica. Por esta razón, comenzaremos con la medición.

Términos

La palabra *geometría* viene de raíces griegas que significa medida de la Tierra. Uno de los primeros usos de la geometría era medir los límites de las granjas.

Probablemente lo más básico que podemos medir es la longitud. Nuestras unidades para las medidas de área y volumen están basadas en unidades de longitud. Además, muchos de los instrumentos de medir expresan sus resultados en longitud junto a una escala en vez de en términos de lo que se está midiendo. Por ejemplo, en un termómetro tradicional no vemos directamente el calor. En lugar de eso, vemos cuán alta la columna de mercurio sube. Los velocímetros de algunos automóviles son leídos en una escala parecida, volteada de lado. Juzgamos la velocidad por cuán lejos el indicador se ha movido en dirección a las agujas de un reloj, no por cuán rápido éste se mueve. El estudiar cómo se mide la longitud nos ayudará a entender otros tipos de medidas, así que aquí es que empezamos.

¿Qué otras cosas en tu vida diaria son medidas en términos de longitud? ¿Puedes pensar en media docena? ¿En una docena? ¿Más de esto?

PICTURE

Las clases de matemáticas del décimo grado en la Escuela Euclid han estado estudiando a China. Dos de los estudiantes encontraron un amigo por correspondencia en Beijing. La clase lee las cartas. Los estudiantes están curiosos por saber dónde queda Beijing, cuán lejos está, y cuánto se tardarían en llegar allí. Ellos saben que hay aviones que vuelan a China desde Filadelfia, y saben dónde está Filadelfia y deciden hacer planes para un viaje imaginario a Beijing. Están observando mapas para saber cómo llegar hasta allá. También quieren saber cuán lejos tendrían que viajar y cuánto se tardarían. Observa un mapa plano del mundo (en un atlas o en un mapa de pared) y ayúdalos a contestar las siguientes preguntas.

1. **¿Qué ruta seguiría la clase? ¿Piensas que volarían sobre Denver? ¿La Bahía de Hudson? ¿California? ¿Japón? ¿Siberia?**
2. **¿Alrededor de cuán lejos viajarán? Necesitas una escala de juzgar distancias para conseguir esta información a través del mapa. Hay aproximadamente 25,000 millas alrededor de la Tierra en el ecuador. Luego mide cuán lejos está Filadelfia de Beijing en el mapa. Si la escala en el ecuador funciona para esta ruta, ¿cuán lejos es de Filadelfia a Beijing?**

Desafortunadamente, el mundo no es plano como el mapa. Los estudiantes deciden que también quieren ver su viaje en un globo terráqueo. Esta es una buena idea para nosotros también.

- 1. Usa una regla flexible o una cinta de medir, para medir en un globo la ruta que escogieron de Filadelfia a Beijing. Asegúrate que la cinta sigue la ruta con precisión. Para asegurarte revisa algunos lugares a lo largo de la ruta. Luego mide alrededor del globo en el ecuador. La Tierra tiene aproximadamente 25,000 millas a su alrededor. Encuentra la escala para tu globo y úsala para encontrar la longitud de tu trayectoria.**
- 2. ¿Cuán grande es la distancia este-oeste alrededor del mundo en la latitud de Filadelfia?**
- 3. Usa tu respuesta al ejercicio 2 y las medidas que encontraste en tu mapa plano para recalcular la distancia de Filadelfia a Beijing. Compara tu resultado con el resultado del ejercicio número 1.**

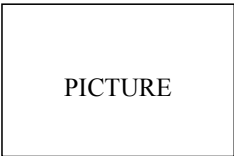
La Tierra es un objeto tridimensional y nosotros vivimos en o cerca de su superficie. Un mapa plano es un intento de representar esta superficie. Debido a que la Tierra no es plana, cualquier mapa plano es una aproximación. Hay varias maneras de hacer mapas planos. Cada uno tiene sus ventajas y sus desventajas. El mapa plano clásico del mundo es llamado un **mapa de Mercator**.

El mapa de Mercator fue diseñado para planificar viajes largos para barcos en el océano. Éste representa direcciones correctamente. Si A está al noroeste de B en el mapa de Mercator, entonces navegar al noroeste desde A eventualmente te llevará a B . Sin embargo, mientras más lejos te mueves del ecuador, más se distorsiona el tamaño del mapa de Mercator. Otros tipos de mapas planos del mundo mantienen el tamaño, pero distorsionan otras cosas, como es la forma o la dirección. No es posible hacer un mapa plano del mundo que mantenga ambos, el tamaño y la dirección a la misma vez. El hecho de que esto no podía ser fue actualmente probado por Leonard Euler, un matemático suizo del siglo 18.

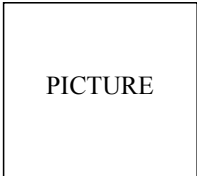
Términos

El *mapa de Mercator* fue diseñado por Gerhardus Mercator, un cartógrafo flamenco que vivió del 1512 a 1594. Él le dio el nombre a América del Norte y América del Sur, y fue la primera persona en llamar a una colección de mapas, un atlas.

1. ¿Cuán grande es Groenlandia comparada con América del Sur en un mapa de Mercator? Ahora, compáralos en el globo. ¿Cuán preciso es el mapa, comparado con el globo?
2. Además de distorsionar la distancia, un mapa plano puede confundirnos acerca de la ruta más corta de un lugar a otro. Para encontrar la ruta más corta de Filadelfia a Beijing en el globo, coloca un extremo de una cuerda en Filadelfia, hala la cuerda tensándola, entonces marca el punto donde la cuerda llega a Beijing. Mide la longitud y calcula la distancia entre Filadelfia y Beijing por esa ruta. ¿Cómo esta distancia se compara con la distancia de este-oeste (a lo largo del paralelo 40) que encontraste anteriormente?
3. ¿Volaría la clase sobre Denver si toman la ruta que encontraste en el ejercicio 2? ¿Sobre la Bahía de Hudson? ¿California? ¿Japón? ¿Siberia?



El mapa plano y el globo son **modelos** de la superficie de nuestro planeta. Cada uno representa algunas características de nuestro mundo que son consideradas importantes para un propósito particular y deja afuera otras que no lo son. Ningún modelo es perfecto. El globo es el mejor modelo para diagramar rutas de vuelos largos. El mapa plano es más útil si quieres encontrar tu rumbo alrededor de una región pequeña, como Minneapolis. También es mucho más fácil para doblarse y guardarlo en tu bolsillo.



Los mapas y los globos son modelos hechos de papel, metal o plástico. También podemos hacer modelos con las matemáticas. Cuando un objeto matemático como una ecuación o una función son usados para describir una situación fuera de las matemáticas, ese objeto es un *modelo matemático*. Por ejemplo, si un club de discos vende CDs a \$10.99 cada uno y cobra \$3 por orden de envío, entonces la cantidad total facturada, b (en dólares), es una función del número n de los CDs ordenados. Esto es, la función

$$b(n) = 3 + 10.99n$$

es un modelo matemático del proceso de facturación. Anteriormente viste muchos modelos matemáticos parecidos de situaciones reales en **MATH Connections**.

**George Box, un reconocido estadístico, una vez dijo,
“Todos los modelos están equivocados; algunos modelos
son útiles.”¹ ¿Qué crees que él quiso decir con esto?**

Por muchos años, el tema tradicional de la *geometría plana* era un modelo matemático de cómo los mapas planos trabajan. La geometría plana comenzó con la agrimensura de tierra en el Antiguo Egipto. Este modelo matemático no describe la superficie entera de la tierra con precisión, porque la superficie no es plana. Sin embargo, es lo suficientemente precisa como para prospectar campos o para tomar viajes cortos. Este libro comienza con una larga y cercana observación a la geometría plana y su poder para describir bien muchas cosas.

Una razón por la cual la geometría plana es un instrumento tan poderoso es que está fundada en un pequeño número de ideas básicas y muy simples. ¡Pero ten cuidado! Su simplicidad puede ser engañosa. Debes pensar detenidamente acerca de estas ideas básicas hasta que entiendas verdaderamente por qué son importantes. De lo contrario, como una casa hecha de barajas, con una o dos barajas puestas en la base mal puestas, tu entendimiento de geometría puede caer sin aviso.

La medición es una de esas ideas básicas. Al igual que los antiguos egipcios, así es como comenzamos nuestro estudio de geometría. La medición es una de dos maneras principales de relacionar los números del mundo a nuestro alrededor. La otra manera es contando. Tú has tenido mucha práctica contando cosas –centavos, dólares, dulces, automóviles, boletos, páginas, personas y así sucesivamente. Cada vez que queremos saber *cuánto hay* de algún objeto, contamos. Los objetos tienen que ser separados, distintos; que dicen ser **discreto**. La rama de las matemáticas que trata con los procesos relacionados con la contabilidad de dichas cosas es llamada **matemáticas discretas**. Los principios de contabilidad y las leyes de probabilidad que estudiaste anteriormente son parte de las matemáticas discretas. El resto de esta sección, así como la mayoría de este libro, *no* es acerca de las matemáticas discretas.

Términos

Una palabra en inglés para *plano* es *flat*.

¹ Box, George, “Robustness in the Strategy of Scientific Model Building,” en Lanner and Wilkerson, Eds., *Robustness in Statistics* (New York: Academic Press, 1979), págs.201-236.

La otra manera principal en la cual conectamos números a otras cosas es midiendo propiedades de un objeto solamente, como su peso, longitud, o temperatura. Cada vez que queremos saber *la cantidad* de algo, medimos. Estas medidas no están restringidas a los números de contar; puede que estos tomen cualquier valor, incluyendo valores negativos, fracciones y otros. La rama de matemáticas que trata con este tipo de situación es llamada matemáticas continuas. La rama más famosa de las *matemáticas continuas* es el cálculo, pero la parte de geometría que trata con la medición de longitudes, áreas y volúmenes es también de las matemáticas continuas.

¿Cuál de las siguientes preguntas hace referencia a la contabilidad y cuál hace referencia a la medición? No tienes que contestar las preguntas.

1. **¿Cuál es la población de tu estado?**
2. **¿Cuál es la precipitación anual promedio en tu estado?**
3. **¿Cuál es el récord de temperatura alta para tu estado?**
4. **¿Cuántas personas en tu clase escriben con la mano izquierda?**
5. **¿Cuántas personas en tu clase miden más de seis pies de estatura?**
6. **¿Qué cantidad de perros calientes (hot dogs) fue vendida ayer en el juego de pelota?**
7. **¿Qué cantidad de palomitas de maíz (popcorn) fue vendida ayer en el juego de pelota?**

Para medir cantidades continuas se comienza escogiendo una unidad. La palabra clave aquí es “escogiendo.” Cualquier sistema de medida está basado en un pequeño número de unidades independientes de medidas, algunas veces llamadas **unidades bases**. Estas unidades bases son *escogidas* por su *conveniencia*. Todas las otras unidades de medida dentro del sistema son definidas en término de las unidades de base. Por ejemplo, la unidad base de medida de longitud en el sistema métrico es el *metro*; en el sistema inglés, es el *pie*.

Muchas unidades antiguas de longitud, como lo es el pie, estaban basadas en partes del cuerpo de una persona “típica.” Otras que fueron usadas incluyen:

- *Medir en palmos*: la distancia desde la punta del dedo pulgar hasta la punta del dedo pequeño cuando los dedos están extendidos
- *La palma*: el grosor de la palma de la mano o los cuatro dedos juntos
- *El dígito*: el grosor del primer dedo.



PICTURE

Aquí hay algunas unidades de longitud menos conocidas basadas originalmente en objetos de la vida diaria.

cable cadena braza estadio mano

Escribe una o dos oraciones acerca de cada una, describiendo:

- **el objeto en el cual está basado**
- **cómo se compara con pulgadas, pies o millas y**
- **la ocupación, actividad o situación en el cual es usada.**

Busca los que no conoces.

El problema con las unidades de longitud como es el medir en palmos, palma, dígito y pie es obvio: los tamaños de las manos y los pies varían de persona a persona. Teniendo una unidad de medida que es diferente para cada persona sería como si cada persona hablara un lenguaje diferente. ¡Nadie sabría lo que estarían hablando los demás! Una manera alrededor de este problema es escoger una persona especial, como un rey, para definir la unidad. En Inglaterra, el rey Enrique I (1068-1135) declaró una yarda como la distancia entre la punta de su nariz hasta la punta de su pulgar derecho con su brazo extendido. Este vino a ser la base de medida del sistema inglés, el sistema que todavía se usa hoy en día en los Estados Unidos.

¿Cuán larga sería una “yarda” si tú fueras el monarca y en qué estaría basado? Recoge toda la información de cada miembro de tu clase en la distancia desde la punta de la nariz hasta la punta de tu dedo pulgar derecho con el brazo extendido. Haz un diagrama de caja (boxplot) de toda la información y encuentra la media y la mediana. ¿Está cualquiera de las dos cerca de la yarda estándar de 36 pulgadas?

Para que cualquier sistema de medida funcione bien, la unidad de base debe ser constante; no puede cambiar de tiempo en tiempo o de lugar en lugar. Para asegurarnos que esto sucede, las unidades de longitud basadas en las personas han sido reemplazadas con unidades definidas por varas de metal, mantenidas en laboratorios científicos. Estas varas se mantienen del mismo tamaño año tras año. En los Estados Unidos, la Agencia Nacional de Estándares supervisa estas unidades de medidas oficiales (y muchas otras).

Una vez una unidad de longitud es escogida, medimos algo aplicando la unidad una y otra vez, contando cuántas unidades toma para hacer un entero. A diferencia de tus pies, las reglas generalmente están marcadas en una variedad de unidades y subdivisiones. Por ejemplo, una regla puede que esté marcada en centímetros y milímetros en un lado y en pulgadas en el otro lado. Las pulgadas pueden estar divididas en décimos, octavos o dieciseisavos. En cierto sentido, estas subdivisiones son solamente una manera de escoger unidades más pequeñas relacionadas cuando son necesarias para medir con más exactitud. Nosotros medimos las longitudes de varias cosas diferentes, pero la mayoría de estos tienen el mismo modelo matemático: la medida de un segmento de línea.

La Figura 1.1 muestra cuatro segmentos de línea. Mide cada segmento con una regla, usando estas tres bases diferentes de unidades de longitud: pulgadas, centímetros, milímetros. En cada caso, ¿Cuál base de longitud piensas que fue más fácil para usarse? ¿Por qué?



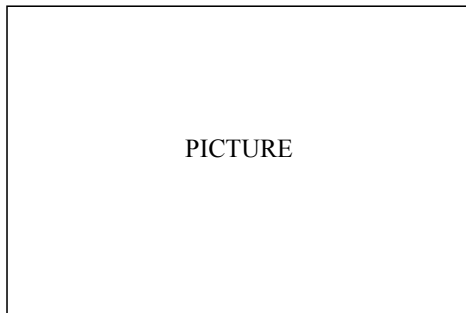
Figura 1.1

En geometría, distinguimos entre una *línea*, la cual sigue infinitamente en ambas direcciones y un **segmento de línea**, un pedazo de una línea que *no* continúa indefinidamente en ninguna dirección. Un segmento consiste de dos extremos y todos los puntos en esa línea recta que está entre los extremos. Es común rotular puntos interesantes con letras capitales y generalmente rotulamos los extremos de un segmento de línea. La Figura 1.2 muestra un segmento de línea con sus extremos rotulados *A* y *B*. Podemos hacer referencia a este segmento simplemente como *AB*. Nota que el punto *C* no es parte del segmento de línea porque no está en la línea a través de *A* y *B*.



Figura 1.2

Siempre que midas una longitud, puedes pensar en este como la longitud de un segmento de línea. Por ejemplo, si mides el grosor de tu salón, tienes que escoger una línea (imaginaria) a lo largo del piso o de la pared en donde puedas hacer la medida. Nota: Al medir la longitud, asumimos que todas las líneas y los segmentos de líneas son rectos. Como viste anteriormente en esta sección, la rectitud no es siempre obvia o tan simple como parece. Esta suposición simplifica nuestro trabajo, pero tenemos que ser cuidadosos de no aplicar los resultados a situaciones donde la “rectitud” no se mantenga.



PICTURE

Una manera de trabajar con medidas básicas es usando un compás. Si tienes un segmento para medir y una unidad base de longitud, establece la distancia entre los dos puntos para parear la unidad. Luego usa el compás para marcar copias de la longitud base en el segmento. La Figura 1.3 muestra este método con un compás de los que usan los redactores. Primero el compás es ubicado para que coincida con la unidad. Luego colocamos el punto en *A* y usamos un bolígrafo para marcar una unidad en *B*. Repetimos el proceso, comenzando en *B*, y continuamos hasta que terminemos los segmentos. Esto muestra que hay un poco más de cuatro unidades de la *A* hasta la *C*.

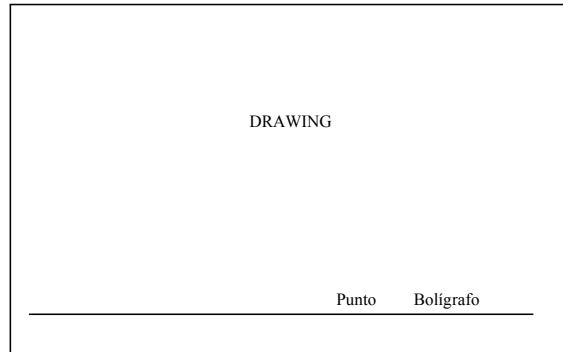


Figura 1.3

Traza o copia la longitud de los segmentos de línea en la Figura 1.4. Luego mídelos con un compás, usando el segmento más corto, “el wobbit,” como tu unidad de longitud.

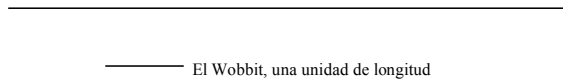


Figura 1.4

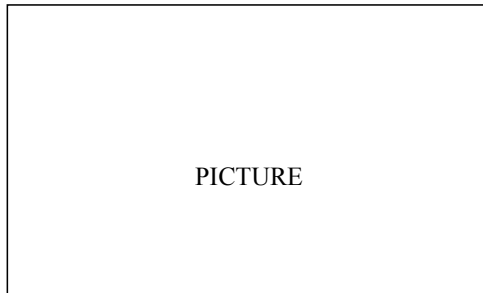
Conjunto de ejercicios: 1.1

1. Encuentra cuál parece ser la ruta más corta de Miami, Florida a Oslo, Noruega, en un mapa plano y en un globo terráqueo. ¿Cuál de estas rutas pasan cerca de Nueva Escocia? ¿Cuál ruta es más corta?
2. ¿De qué manera un globo *no* es un modelo preciso de la Tierra? Haz una lista. ¿Cuáles cosas en tu lista son inexactitudes en mapas planos?



3. Dos excursionistas se levantan en la mañana y encuentran que un oso ha atacado los suministros de alimentos en su campamento. Ellos decidieron ir tras el oso. Caminaron una milla al sur, luego una milla al este y finalmente una milla hacia el norte. En este punto se encontraron de regreso al campamento, ¡donde el oso estaba almorzando! ¿De qué color es el oso?
4.
 - (a) Mide el grosor y la altura de una página de tu cuaderno de trabajo en “wobbits.” Usa un compás para un “wobbit.”
 - (b) En centímetros, ¿cuán largo es un “wobbit.”?
 - (c) En “wobbits”, ¿cuán largo es un pie? Mide una regla usando un compás para un “wobbit.”
 - (d) En centímetros, ¿cuán largo es un pie? Contesta esto con cualquier método que escojas.
 - (e) ¿Cuál es más largo, una vara de 15 centímetros o una vara de 15 pulgadas?
 - (f) Si una vara es 10 “wobbits” de largo, ¿es más o menos 10 pulgadas de largo? ¿Es la vara más o menos 10 centímetros de largo?

5. El tiempo es un poco más difícil de definir y medir que la longitud. Tú no puedes ver un segundo.
- (a) Enumera tantas unidades de tiempo diferentes como puedas. Relaciona cada unidad en tu lista a otra en tu lista.
Ejemplo: 14 días = 1 quincena
 - (b) Las unidades de tiempo están generalmente basadas en algunos eventos repetidos como lo son los movimientos de la Tierra y la Luna. Un globo terráqueo es generalmente construido para que se pueda mover como la Tierra.
 - (i) ¿Cuánto tiempo le toma a la Tierra girar una vez en su eje?
 - (ii) ¿Cuánto tiempo le toma a la Tierra girar una vez alrededor del Sol?
 - (c) En el planeta Marte, la longitud del día es muy parecida a la de la Tierra. A Marte le toma 24.6 horas en girar una vez alrededor de su eje. Sin embargo, a Marte le toma 687 días en darle la vuelta al Sol. Calcula tu edad, al año más cercano, si vivieras en Marte. ¿Tendrías más o menos fiestas de cumpleaños en Marte que en la Tierra? Explica.



6. Algunas veces las personas usan inadecuadamente las palabras *discretas* y *moderadas*. Cuando uno de los autores le dijo a su madre que estaba enseñando matemáticas discretas, ella pensó que era muy divertido. ¿Por qué crees que se estaba riendo? Un diccionario puede que te ayude.
7. ¿Quién era Euclides? Lee acerca de él en una enciclopedia o en un libro de historia. Escribe un párrafo resumiendo lo que encontraste. Por favor asegúrate de escribirlo en tus propias palabras. El usar lo escrito por otra persona como si fueran tus propias palabras es *plagio*, una forma de robar.