

1.10 El volumen

Un edificio ha sido demolido, dejando un hoyo grande en el suelo. El medir el perímetro de la parte superior del hoyo te dice cuán lejos hay que caminar alrededor del hoyo. El medir el área de la parte superior del hoyo te dice cuánta madera necesitarías comprar para cubrirlo y así nadie caiga en él. El medir el volumen del hoyo te dice cuánto relleno necesitas para llenarlo. Usamos un segmento de unidad para medir la longitud, una unidad cuadrada para medir el área y una unidad cúbica para medir el volumen.

El tamaño de una unidad cúbica depende en la unidad de longitud que escojas. Una **unidad cúbica** es un cubo que mide una unidad de longitud a lo largo del borde. Una **pulgada cúbica** es un cubo con cada borde de una pulgada de longitud, un **metro cúbico** es un cubo con cada borde de un metro de longitud y así sucesivamente. El **volumen** de un objeto tridimensional es el número de unidades cúbicas (de una unidad de longitud) necesaria para llenar el espacio del objeto que ocupa.

1. **¿Cuántas unidades cúbicas son necesarias para llenar cada una de las cajas con las dimensiones (en cm.) dadas en la Figura 1.75? Copia y completa la tabla.**
2. **¿Cuál de las cinco cajas en la tabla de la Figura 1.75 es presentada en la Figura 1.76?**
3. **Usa los datos de tu tabla para determinar el número de cubos que son necesarios para llenar una caja con cualquier dimensión. Puede que quieras construir cajas con otras dimensiones para datos adicionales.**

Caja	Longitud	Anchura	Altura	Núm. de cubos
A	4	2	2	
B	4	3	2	
C	4	4	2	
D	4	4	3	
E	4	4	4	

Figura 1.75

¿Te dirá tu fórmula cuantas unidades cúbicas se necesitan para llenar una caja aún si las dimensiones de la caja no son números enteros? Explica.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Encontrar el volumen de una caja rectangular llenándola con unidades cúbicas

Encontrar el volumen de una caja rectangular midiendo sus lados y usando una fórmula.



Figura 1.76

EXPLORACIÓN

Deberíamos explorar cuánto volumen está relacionado al área diseñando moldes de pasteles.

PREPARACIÓN

Saca una hoja de papel cuadriculado y corta un cuadrado 18 por 18, como se muestra en la Figura 1.77. No te preocupes por las marcas de las esquinas todavía. Éste representa una hoja de metal de 18 pulgadas en cada lado. La Kingpin Cakepan Company (KCC, por sus siglas en inglés) quiere hacer moldes de pasteles de estas hojas de metal. Ellos quieren que el molde sostenga un volumen tan grande como sea posible. Ellos no están seguros como hacer esto, así que han contratado a tu clase para que los ayuden a encontrar como hacerlo.

Para hacer un molde de pastel, cortas un cuadrado en cada esquina, luego doblas hacia arriba cada esquina para hacer el molde. La Figura 1.77 muestra la hoja marcada para ser cortada en cuatro tamaños diferentes de cuadrados a través de las esquinas: 1 por 1, 2 por 2, 3 por 3 y 4 por 4. Tu maestro dividirá la clase en equipos. El Equipo 2 cortará un cuadrado 2 por 2, hará un molde y sacará el volumen. El Equipo 3 cortará un cuadrado 3 por 3, hará un molde y sacará el volumen –y así sucesivamente. Nosotros seremos el Equipo 1, para proveer ejemplos a lo largo del camino. Nos referiremos a ustedes como Equipo n , donde n es un número de 2 a 8.

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es el perímetro de toda la hoja de metal? ¿Cuál es el área?
2. Corta un cuadrado n por n en cada esquina. ¿cuál es el perímetro que queda en la hoja de metal? ¿Cuál es el área? El Equipo 1 corta un cuadrado que es 1 pulgada de alto por 1 pulgada de largo. El área del fondo del molde es 256 pulgadas cuadradas.
3. ¿Cuántos cubos de 1 pulgada caben en el molde? Este es su volumen. Al molde del Equipo 1 le caben 256 cubos de 1 pulgada.
4. Si tu molde fuera lleno con unidades cúbicas, ¿cuántas capas habrían en el molde? ¿Cuántos cubos habrían en cada capa? El molde del Equipo 1 contiene una capa de 256 cubos.

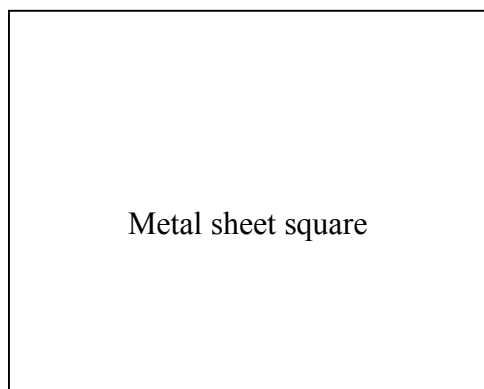


Figura 1.77

Haz una tabla con los resultados de toda la clase. Incluye la longitud del lado, la altura, el área del fondo y el volumen de cada molde de pastel. ¿Encuentras algún patrón en la tabla? ¿Cuál equipo tiene el molde con el volumen más grande?

Probablemente tienes un equipo ganador –un equipo con el volumen más grande. Sin embargo, antes que le des los resultados a KCC, puede que quieras revisarlos y asegurarte que están correctos. Después de todo, si uno de los resultados es realmente un error grande, puede parecer como que el volumen es más grande. Además no has revisado los pedazos cortados que no son números enteros. Tal vez uno de ellos te da un volumen mayor.

Una manera de revisar tus resultados es haciendo una gráfica. Si los puntos caen en una línea o en una curva suave, esto te da más confianza de que los resultados están correctos. Si encuentras un patrón con una excepción, puede que quieras revisar la excepción.

Para hacer una gráfica con una calculadora gráfica, necesitas expresar el volumen como una función de una variable, x . En este caso, deja que x sea la longitud del lado de los cuadrados cortados.

1. **Expresa la altura del molde en términos de x .**
2. **Expresa la longitud del molde en términos de x .**
3. **Expresa el ancho del molde en términos de x .**
4. **Expresa el volumen del molde en términos de x .**

5. **Ahora diagrama la función del volumen en tu calculadora. Usa la información que recogió la clase como guía para preparar tu ventana.**
6. **¿Está el volumen que tu equipo consiguió de acuerdo con la gráfica? Revisa usando la opción de menú en la calculadora para encontrar el valor de n .**
7. **¿Parece haber un volumen máximo? ¿Para qué valor de x ? ¿Parece estar esto de acuerdo con lo que consiguió uno de los equipos?**

REFLEXIONA

Este capítulo rastrea el estudio de la geometría hasta sus raíces. La raíz vertical puntiaguda –la raíz más básica de todas– es la idea de un segmento de línea y una unidad de longitud. Todo ha venido de esa idea central y fundamental. Excepto para esta última sección, tú has estudiado geometría *plana*, la geometría de superficies planas.

Aprendiste cómo hacer y medir polígonos y cómo clasificarlos por su simetría. Viste cómo las áreas pueden ser descritas en términos de unidades cuadradas, las cuales están basadas en unidades de longitud. La gran variedad de polígonos se hacen más manejables cuando son divididos en triángulos por triangulación. Esto hace importante el conocer cómo encontrar las áreas de todos los tipos de triángulos, las cuales hicimos construyendo altitudes y encontrando una fórmula:

$A = \frac{1}{2}bh$, donde h es la longitud de la altura y b es la longitud de su

base. Aprendiste acerca del *Teorema de Pitágoras*, una de las declaraciones más antiguas y poderosas en todas las matemáticas; y finalmente, viste cómo medir volumen en un espacio tridimensional está basado en unidades de longitud y unidades cuadradas.

El próximo capítulo es acerca de cambiar tamaño sin cambiar forma. Este muestra cómo la proporcionalidad es la llave para entender los ángulos y cómo medirlos. Debemos observar de cerca las figuras escamantes de diferentes tamaños, a la congruencia de triángulos y a la relación entre ángulos y líneas paralelas. La triangulación nos permitirá extender nuestros resultados sobre triángulos a otros polígonos, y verás cómo las unidades cuadradas y cúbicas nos ayudan a entender como la escala afecta las áreas y los volúmenes de formas bidimensionales y tridimensionales.

Conjunto de ejercicios: 1.10

1. Ahora tienes un contrato de consultoría a largo plazo con la Kingpin Cakepan Company. Ellos tienen un molde nuevo de pan que mide 4 pulgadas por 5 pulgadas por 9 pulgadas.
 - (a) Encuentra el volumen de este molde en pulgadas cúbicas.
 - (b) KCC necesita tus resultados en cuartos. Hay 57.75 pulgadas cúbicas en un cuarto. ¿Cuántos cuartos caben en el molde? Redondea tu respuesta a dos lugares decimales.
 - (c) KCC todavía no está satisfecho. Para conseguir mejores resultados, deberías llenar el molde de pastel solamente tres cuartas partes. Si haces eso, ¿cuántos cuartos cabrán en el molde? ¿Cuántas pulgadas cúbicas?
2. KCC necesita un molde de pan que sostenga 200 pulgadas cúbicas cuando se llene hasta arriba.
 - (a) Encuentra cinco combinaciones posibles de longitudes, anchuras y altitudes que podrían ser usadas para dicho molde. Por simplicidad en el diseño, mantente con medidas en los números enteros de pulgadas.
 - (b) Para cada posibilidad que consideres, encuentra el tamaño de la pieza de hoja de metal rectangular que necesites para hacer el molde y el tamaño de las esquinas que deben ser cortadas antes de ser dobladas.
 - (c) ¿Cuál de tus cinco diseños usa la menor cantidad de la hoja de metal? ¿Quién podría estar interesado en esta pregunta?
 - (d) ¿Piensas que hay un tamaño aún más pequeño de la hoja de metal que te pueda dar el mismo volumen? ¿Por qué sí o por qué no?
3. En el texto viste que el volumen de un molde de pan rectangular puede ser expresado en términos de su área por su base,

$$V = lwh \text{ ó } V = Ah$$

donde A es el área del fondo del molde. Esta segunda fórmula se extiende a moldes de pan (y formas semejantes) los cuales tienen bases que no son rectangulares.

- (a) KCC hace moldes de pastel en forma de corazón para el Día de San Valentín. El área del fondo es 85 pulgadas cuadradas. El molde es 1.5 pulgadas de profundidad. ¿Cuál es el volumen? ¿Cuántos cuartos de batido sostendrá el molde cuando esté lleno tres cuartas partes? Véase el ejercicio 1. Redondea tus respuestas a dos lugares decimales.
- (b) KCC también hace moldes pequeños de pastel en la forma de prismas triangulares, para usarse por reposteros que necesitan partes para órdenes de pasteles especiales con diseños decorativos.

El fondo del molde es un triángulo rectángulo isósceles con catetos de 4 pulgadas y el molde es de 3 pulgadas de alto. ¿Cuál es el volumen? ¿Cuántos cuartos de batido cabrán cuando estén llenos tres cuartas partes? Véase el ejercicio 1. Redondea tus respuestas a dos lugares decimales.

4. La familia Fixit renovó una parte vieja de su casa. Ellos tenían un remolque lleno de yeso viejo, tablilla, extremos de madera y pedazos de paneles de yeso de las paredes para deshacerse de esto. Su remolque es 5 pies por 8 pies con 2 pies de alto en los lados, y estaba completamente lleno.
 - (a) Cuando ellos llegaron al centro de desechos de la ciudad, ellos encontraron que costaba \$15 por yarda cúbica (o fracción) para deshacerse de esta basura. ¿Cuánto tuvieron que pagar?
 - (b) Después que los Fixits se deshicieron de su basura, ellos recogieron una carga de leña cortada, la cual se vende a \$120 el atado con cuerda. El leñero llenó su remolque completamente y les cobró \$80. Un atado de leña es generalmente medido como una pila de 4 pies por 4 pies por 8 pies. ¿Consiguió la familia Fixit un buen trato, un trato justo o un trato pobre?
5. El Acuario Armstrong tiene un tanque de delfines que es 40 pies por 30 pies por 15 pies de profundidad. Sus dueños necesitan limpiarlo y volver a pintarlo. Las instrucciones del detergente de limpiar dice que ellos deberían de llenar el tanque de agua completamente y añadir una caja del detergente por cada 10,000 galones de agua en el tanque.
 - (a) Encuentra el volumen del tanque en pies cúbicos.
 - (b) ¿Cuántas pulgadas hay en un pie? ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en un pie cuadrado? ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en un pie cúbico?
 - (c) ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en el tanque de delfines?
 - (d) Un galón contiene 231 pulgadas cúbicas. ¿Cuántas cajas de detergente deberían de comprar los dueños del Acuario Armstrong?
 - (e) Después de limpiar el tanque, ellos quieren pintarle el piso y las paredes de adentro. Encuentra el área que quieren pintar.
 - (f) La pintura que necesitan se vende solamente en galones. Un galón cubre 400 pies cuadrados. ¿Cuántos galones deben de comprar?

PICTURE