1.3 La simetría

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Identificar simetría de una línea

Identificar un triángulo equilátero a través de la simetría

Construir la bisectriz perpendicular de un segmento de línea dado

Encontrar el sendero más corto de un punto a una línea.

La simetría es una idea fundamental de la naturaleza, el arte y la ciencia. Hay muchos tipos de simetría. El tipo que vas a estudiar en esta sección es simetría de una línea. La idea es que si tomas la parte de la figura que cae en un lado de la línea y la doblas sobre el otro lado, quieres que la otra mitad caiga exactamente encima de la primera mitad de la figura. Algunas veces llamamos a esto “simetría de mancha de tinta.” Imagínate que colocas una gota de tinta o pintura encima de un pedazo de papel y luego doblas el papel a lo largo de la línea a través de la gota. Si aprietas el papel doblado y luego lo abres, conseguirás una mancha que es simétrica por la línea de doblez, como se muestra en la Figura 1.15

INKBLOT

Figura 1.15

La línea de doblez es llamada la línea de simetría o **eje de simetría**. Esta línea divide la figura en la mitad, para que la mitad en un lado del eje sea una “imagen de espejo” de la otra mitad. Algunas veces puedes encontrar el eje de simetría de una figura si lo trazas en un pedazo de papel. Luego usa el método de tanteo para ver si puedes encontrar que las dos mitades se puedan alinear. Si tienes éxito, el pliegue en el papel donde lo doblaste será el eje de simetría.

PICTURE

Para cada uno de los cuatro dibujos en la Figura 1.16:

1. **Encuentra todos los ejes de simetría de su contorno (su forma, como si fuera solamente una sombra).**

2. **Encuentra todos los ejes de simetría del dibujo. Para cualquier dibujo que sea *casi* simétrico, di que lo previene de ser exactamente simétrico.**

1936 Pontiac	Corvette
tomacorriente	bocinas

Figura 1.16

La Figura 1.17 muestra dos gráficas de caja.

1. **¿Es cualquiera de las dos simétrica por la línea horizontal a través de sus bigotes? ¿Son ambas simétricas?**

2. **¿Es cualquiera de estas simétrica por la línea vertical a través de sus medianas? ¿Son ambas simétricas?**

3. **¿Qué (si algo) puedes decir acerca de la distribución de datos si la gráfica de caja es simétrica cerca de su línea mediana?**

Figura 1.17

Muchas figuras geométricas tienen ejes de simetría. La Figura 1.18 muestra tres copias de un triángulo, Δ *ABC*, con sus tres ejes de simetría marcados.

Figura 1.18

Traza la primera copia del Δ *ABC* en un pedazo de papel. Dóblala a lo largo de su línea de simetría a través del vértice *A*. ¿Qué notas acerca de los lados *AB* y *AC*?

Cuando logras colocar una copia de un segmento encima de otro para que las dos coincidan exactamente uno encima del otro, decimos que los dos segmentos son **congruentes**. Los extremos de los dos segmentos, deben particularmente coincidir, para que los dos segmentos tengan la misma longitud. De hecho, los dos segmentos son congruentes en *dondequiera* que sus longitudes sean iguales.

Estas preguntas hacen referencia a la Figura 1.18:

1. **¿Qué te dice acerca de los lados, el eje de simetría a través del vértice *C*?**

2. **¿Qué te dice acerca de los lados, el eje de simetría a través del vértice *B*?**

3. **¿Qué propiedad especial del Δ *ABC* consigues de las respuestas a las preguntas 1 y 2?**

La Figura 1.18 también muestra algunas ideas importantes.

Observa otra vez tu copia del Δ *ABC* que doblaste a lo largo de la línea de simetría a través de *A*. Rotula el punto donde el doblez interseca *BC* como *M*. ¿Qué puedes decir acerca de las longitudes de *MB* y *M*C? ¿Por qué?

El **punto medio** de un segmento es un punto del segmento que está a la misma distancia de extremo. El punto *M* es el punto medio de *BC*.

También puedes encontrar el punto medio de una línea de segmento con una regla sin marcas y un compás. Este es un método particularmente exacto. Un procedimiento para crear un objeto geométrico es llamado una **construcción geométrica**. Trabaja a través de los siguientes pasos para ver cómo funciona la construcción del punto medio.

- Toma un pedazo de papel. Usando una regla, dibuja un segmento de línea en éste, en algún lugar cerca del centro, y rotula sus extremos A y B. Su longitud exacta no es importante, pero haz un tamaño conveniente para trabajar con éste. Funcionará bien en algún lugar entre 2 y 4 pulgadas.
- Ubica tu compás a una distancia que sea más larga que la mitad de la longitud de AB. Ubicarlo a la longitud completa de AB funcionará bien, pero no es necesario. Usando la ubicación, coloca el punto en el extremo de la línea y arrastra el bolígrafo a través de dos arcos, uno en cada extremo. Asegúrate de mantener la misma ubicación del compás igual para ambos arcos. Dibuja lo suficiente de cada arco como para que intersequen encima y debajo de AB, como en la Figura 1.19 (a).

Figura 1.19

- Rotula los dos puntos donde los arcos intersecan C y D. Dibuja la línea CD con tu regla. La línea CD interseca AB en su punto medio, M. Tus construcciones completas deberían parecerse a la Figura 1.19(b). ¿Coteja sí es así para $AM = MB$? Debería ser así.

En tu diagrama, escoge el punto *P* en algún lugar a lo largo de *CD*. Dibuja *AP* y *BP*. Ahora dobla tu diagrama a lo largo de *CD*.

1. **¿Qué observas acerca de los segmentos *MA* y *MB*?**

2. **¿Qué observas acerca de $\angle AMC$ y $\angle AMD$?**

3. **¿Qué observas acerca de los segmentos *PA* y *PB*? Explica por qué tu observación debería ser cierta, sin importar dónde a lo largo de *CD* escoges *P*.**

4. **Expresa de otra manera tu respuesta al ejercicio 3 como una afirmación acerca de todos los puntos de la línea *CD*.**

El ejercicio de doblaje que acabas de hacer ilustra que la línea *CD* es un eje de simetría para el segmento *AB* –de hecho, para el diagrama completo en la Figura 1.19(b). Éste es llamado la **bisectriz perpendicular** de *AB*. Esto significa que *CD* interseca *AB* en los ángulos rectos y los corta en dos partes iguales.

Términos

El prefijo *bi-* significa dos. El resto de la *bisectriz* viene de la misma raíz que *sección*. Una sección es un pedazo de algo. La *bisectriz* significa cortar en dos pedazos iguales.

Cuando dos líneas intersecando forman ángulos que coinciden uno al lado del otro, los ángulos son llamados ángulos rectos. Las líneas que forman los **ángulos rectos** se dice que son **perpendiculares**. El ejercicio 2 arriba te dice que notes que el $\angle AMC$ y $\angle AMD$ son ángulos rectos; estos coinciden cuando el diagrama es doblado a lo largo de *CD*. Tu respuesta al ejercicio 4 es una propiedad importante de las bisectrices perpendiculares. ¿Qué fue esto?

Una bisectriz perpendicular puede usarse para construir el sendero más corto de un punto a una línea, generalmente llamado "dejando caer una perpendicular" de un punto a una línea. Para ver de dónde proviene este nombre, observa la Figura 1.20(a). Piensa en la línea *L* como el nivel del piso. Del punto *P* arriba, quieres el sendero más corto a *L*. Imagina estar sosteniendo un cordón con una pesa en *P* (como una línea de pesa del agrimensor) para que el fondo de éste solamente toque el piso. Este es el sendero perpendicular desde *P* a *L*, ¿pero será el más corto? ¡Sí! Solamente piensa en balancear el cordón con pesa de lado a lado como un péndulo, como se muestra en la Figura 1.20(b). El cordón toca el piso *solamente* en la perpendicular ("recto hacia abajo"); para cualquier otro sendero de *P* a *L* tendrías que usar más cordón. Esto es, la distancia perpendicular es la distancia más corta de *P* a *L*.

PICTURE

Figura 1.20

La construcción geométrica de una perpendicular desde un punto a una línea es una extensión fácil del proceso de la bisectriz perpendicular. Observa la Figura 1.20(a) otra vez. Si *P* fuera a la misma distancia de separación desde dos puntos, como *A* y *B*, en *L* entonces la línea de simetría en la que coinciden los segmentos *PA* y *PB* debería tener la bisectriz perpendicular de *AB*. ¿Puedes justificar esta afirmación? Te volveremos otra vez a preguntar en el conjunto de ejercicios. Así que el problema es solucionado si podemos encontrar dos puntos en *L* que están a la misma distancia de *P*.

Sugerencia

Trabaja de atrás hacia adelante. Algunas veces ayuda pensar acerca de un problema trabajando hacia atrás de lo que tú quieres a lo que tienes.

1. **Dibuja una copia de la Figura 1.20(a). Luego usa un compás para localizar dos puntos en *L* que estén a la misma distancia de *P*. Rotúlalos *A* y *B*.**

2. **Ahora termina de construir la perpendicular de *P* a *L*.**

Conjunto de ejercicios: 1.3

1. La figura en la Figura 1.21 es llamada un *pentagrama*. Este era un símbolo especial de los pitagóricos de la Antigua Grecia. Su contorno es la familiar estrella de cinco puntas que aparece en la bandera de los Estados Unidos.

(a) Dibuja cuidadosamente una copia de esta figura como un sendero poligonal sin levantar tu lápiz del papel. ¿Cuántos segmentos de línea hay en tu sendero?

(b) ¿Es el pentagrama un polígono? Si es así, ¿Cuántos lados tiene? Si no es así, ¿por qué no?

(c) ¿Es el contorno del pentagrama un polígono? Si es así, ¿Cuántos lados tiene? Si no es así, ¿Por qué no?

(d) ¿Cuántos ejes de simetría tiene el pentagrama? Dibújalos todos en tu copia de la figura.

(e) ¿Cómo está un pentagrama relacionado con un pentágono?

Un pentagrama
Figura 1.21

2. La figura en la Figura 1.22 es llamado un *hexagrama*. Es un símbolo tradicional del judaísmo, llamado la Estrella de David. Una forma de esta figura aparece en la bandera de la República de Israel.

(a) ¿Es esta figura un sendero poligonal con seis lados? ¿Es un sendero poligonal? Si es así, ¿se puede trazar completamente sin levantar el lápiz del papel?

(b) ¿Es el hexagrama un polígono? Si es así, ¿Cuántos lados tiene? Si no es así, ¿por qué no?

(c) ¿Es el contorno del hexagrama un polígono? Si es así, ¿Cuántos lados tiene? Si no es así, ¿por qué no?

(d) Describe todos los ejes de simetría para esta figura.

(e) ¿Cómo está relacionado un hexagrama a un hexágono?

PICTURE

Un hexagrama

Figura 1.22

3. La simetría es importante en diseños decorativos. Encuentra todos los ejes de simetría para los diseños en la Figura 1.23.

Figura 1.23

4. Muchas letras del alfabeto son simétricas, aunque los detalles dependen particularmente del tipo de letra. La Figura 1.24 muestra las letras del tipo llamado sans-serif que es muy popular. Encuentra todos los ejes de simetría para cada letra.

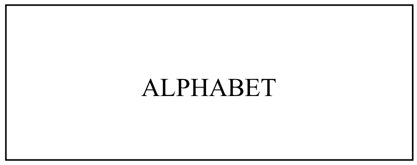

Figura 1.24

5. El conjunto de símbolos en la Figura 1.25 es actualmente una composición tipográfica llamada "Zapf Dingbats" (una marca registrada de International Typeface Corporation). Di *cuántos ejes de simetría* tiene cada símbolo.

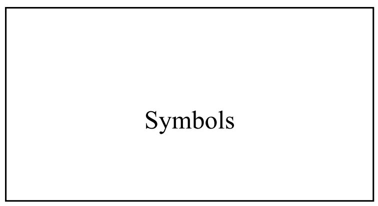

Figura 1.25

6. (**a**) Justifica la afirmación de que *cualquier* eje de simetría de *cualquier* triángulo debe pasar a través de un vértice del triángulo.

(**b**) ¿Es posible para un triángulo el tener dos ejes de simetría, pero no tres? Justifica tu respuesta.

7. Justifica esta afirmación:

Si un punto P que no está en la línea L está a la misma distancia de dos puntos en L, digamos A y B, entonces la línea de simetría que coincide con los segmentos PA y PB debe ser la bisectriz perpendicular de AB.