1.4 Los polígonos regulares

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

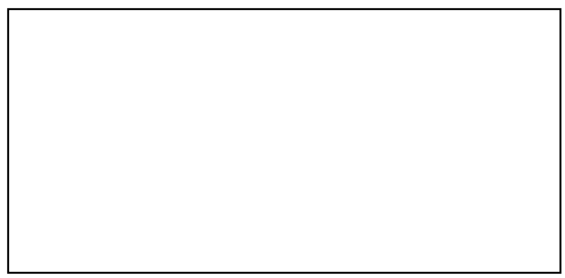
Identificar los ángulos congruentes

Clasificar cuadriláteros como cuadrados, rectángulos, paralelogramos y rombos

Identificar polígonos regulares

Mostrar con ejemplos que el contrario de una afirmación cierta no necesita ser cierta.

En esta sección, aplicaremos la idea de simetría a los polígonos. Estudiaremos en particular, un tipo especial de polígonos llamados **polígonos regulares**. Podríamos definir un polígono regular como un polígono con tanta simetría como sea posible. Esta definición se acerca a cómo explicar las razones por la cuál estos polígonos son importantes en primer lugar. Sin embargo, es un poco difícil de aplicar. ¿Cómo sabemos que tenemos tanta simetría como es posible? Por esta razón, también verás como describes polígonos regulares en términos de sus lados y ángulos.



Algunos cuadriláteros

Figura 1.26

En la Figura 1. 26 aparecen varios cuadriláteros

1. **¿Por qué estas figuras se llaman *cuadriláteros*?**

2. **¿Cuántos ejes de simetría tiene cada cuadrilátero?**

3. **Escoge el cuadrilátero que piensas que tiene la *mayor* cantidad de simetría. ¿Cómo están relacionados los lados de los cuadriláteros escogidos? ¿Cuál de los otros cuadriláteros también tiene esta propiedad?**

4. **¿Cómo se relacionan todos los ángulos del cuadrilátero escogido? ¿Cuál de los otros cuadriláteros también tiene esta propiedad?**

La simetría no es solamente agradable de ver –es práctica. Una vez que haz hecho un diseño para un lado de una parrilla de automóvil o un casco de bicicleta, es fácil hacer el otro lado si tienes simetría. Una carga simétrica en un camión grande es menos posible que haga que el camión se vire en una curva cerrada. Si quieres cercar un área poligonal, un polígono regular te dará el área cerrada más grande para la cantidad menor de cerca. Comenzaremos nuestro estudio de polígonos con muchas simetrías, al revisar lo que conocemos acerca de simetrías en los polígonos que tienen menos lados de todos – los triángulos.

En la sección anterior, vimos las simetrías de un triángulo equilátero. Si quieres observa la Figura 1.18 para refrescar la memoria. Encontramos que un triángulo con tres ejes de simetría tiene todos los lados congruentes. Claro, si los lados coinciden cuando el triángulo es volteado, también será así para los ángulos formados por esos lados. Por lo tanto, un triángulo con tres ejes de simetría debe de tener todos sus *ángulos* congruentes.

Necesitamos ser un poco cuidadosos cuando nos referimos a que los ángulos son congruentes. Un sendero poligonal está hecho de segmentos y ángulos que están interrelacionados. Si eliminas los segmentos ¡los ángulos desaparecen también! Un ángulo no es tanto un objeto, como un segmento, sino una relación entre dos objetos. Un ángulo es la manera en el cual dos segmentos se unen. Cuando hablamos de ángulos congruentes, estamos diciendo que ciertos segmentos se unen de la misma manera. En otras palabras, dos ángulos son congruentes cuando uno puede ser colocado en el otro para que sus esquinas coincidan, sin importar las longitudes de los segmentos que los forman. He aquí otra manera de pensar sobre esto: Si comienzas con cualquier ángulo, puedes cortar los lados más cortos y ellos también se unirán en el mismo ángulo. Tú puedes hacer esto una y otra vez. Sin importar cuán cortos los lados queden, el ángulo se mantendrá sin cambiar.

PICTURE

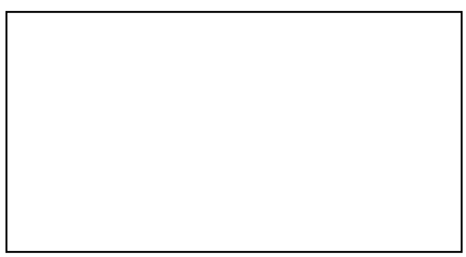
1. **En la Figura 1.27, todos excepto uno de los ángulos son congruentes. ¿Cuál ángulo no es congruente a los otros?**

2. **En la Figura 1.27, tres de los senderos poligonales son congruentes uno con el otro. Ninguno de los otros son congruentes. ¿Cuáles son los tres senderos congruentes?**

Figura 1.27

Has visto que un triángulo con todos sus lados congruentes también tiene todos sus ángulos congruentes y viceversa. Un triángulo con todos sus ángulos congruentes tiene todos sus lados congruentes. Los polígonos que tienen cuatro lados no son tan sencillos. Un cuadrilátero con todos sus lados congruentes (y por consiguiente todos de la misma longitud) es llamado un **rombo**. Si tienes más de uno son llamados **rombos**.

Encuentra todos los ejes de simetría de un rombo en la Figura 1.28. ¿Son algunos ángulos congruentes unos con otros? ¿Son *todos* los ángulos congruentes unos con otros?



Un rombo

Figura 1.28

¿Cómo puedes usar los ejes de simetría para mostrar que las diagonales de un rombo son bisectrices perpendiculares de cada uno? Hazlo, si quieres. (*Pista*: Para ilustrar tu respuesta, dibuja o traza un rombo, y luego dóblalo a lo largo de sus ejes de simetría.)

Las esquinas del rombo en la Figura 1.28 se muestran en dos maneras. El $\angle ABC$ es congruente al $\angle ADC$, pero no a los otros dos ángulos. Esos otros dos ángulos, $\angle BCD$ y $\angle DAB$, son congruentes. Esto hace a un rombo un tipo especial de cuadrilátero. Un cuadrilátero puede que no tenga ángulos congruentes, o puede que tenga solamente dos, o podría tener más.

Estas preguntas hacen referencia a la Figura 1.26, la cual aparece al principio de esta sección:

1. **Encuentra todos los cuadriláteros en la ilustración que no tiene ángulos congruentes.**

2. **Encuentra todos los cuadriláteros en la ilustración que tiene exactamente un par de ángulos congruentes.**

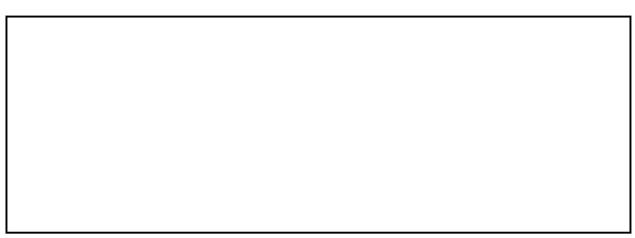
3. **Encuentra todos los cuadriláteros en la ilustración que tiene dos pares de ángulos congruentes, pero no todos los cuatro ángulos congruentes.**

4. **Encuentra todos los cuadriláteros en la ilustración que tiene todos los cuatros ángulos congruentes.**

5. **¿Puede un cuadrilátero tener tres ángulos congruentes, pero no cuatro? Si es así, explica cómo hacer uno. Si no es así, explica por qué no.**

Al contrario del rombo en la Figura 1.28, *todos* los ángulos de un cuadrado o un rectángulo son congruentes. Estos son ángulos rectos. De hecho, un *rectángulo* está definido como un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

Encuentra todos los ejes de simetría del rectángulo en la Figura 1.29. ¿Cómo están relacionados los lados a un rectángulo?



Un rectángulo

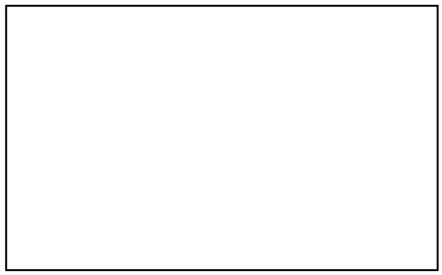
Figura 1.29

Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría. El cuadrado mostrado en la Figura 1.30 es simétrico a través de una línea vertical, una línea horizontal, y líneas a través de vértices opuestos.

1. **¿Es cada cuadrado un rectángulo? ¿Por qué sí o por qué no?**

2. **¿Es cada cuadrado un rombo? ¿Por qué sí o por qué no?**

3. **Usa tus respuestas a las preguntas 1 y 2 para definir un cuadrado.**

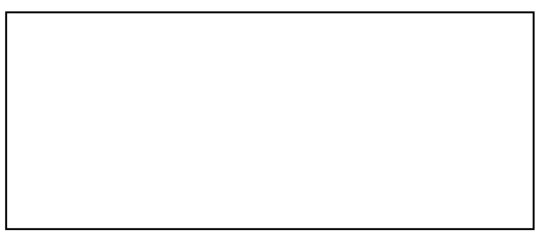


Los ejes de simetría de un cuadrado

Figura 1.30

PICTURE

Los rectángulos, los rombos y los cuadrados son todos casos especiales de paralelogramos. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son congruentes, como en la Figura 1.31. Ésta es una definición perfectamente buena, aunque no dice nada acerca de “paralelo,” pero no explica el nombre.



Un paralelogramo

Figura 1.31

Otra manera de definir un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos. Para ver si los lados opuestos son paralelos, puedes dejar caer perpendiculares de ambos extremos de un lado a la línea determinada por el otro lado.

¿Recuerdas cómo dejar caer una perpendicular desde un punto a una línea? Si esos segmentos perpendiculares son de la misma longitud, entonces los lados son paralelos. Esta definición es equivalente a la primera que presentamos. Esto es, cualquier figura que satisface una definición también satisface la otra. Preferimos la primera ahora mismo porque cumple mejor con nuestra discusión de rectángulos, rombos y cuadrados.

> **Encuentra todos los ejes de simetría para el paralelogramo en la Figura 1.31. Encuentra todos los ángulos congruentes.**

Organicemos lo que sabemos acerca de los tipos de cuadriláteros. Hemos visto que un rombo tiene todos sus lados congruentes, un rectángulo tiene todos sus ángulos congruentes, un cuadrado tiene todos sus lados *y* todos sus ángulos congruentes y un paralelogramo tiene lados opuestos congruentes. En la Figura 1.32 aparece un diagrama mostrando como estos tipos están relacionados.

paralelogramos
(lados opuestos congruentes,
ángulos opuestos congruentes)

rombos rectángulos
(todos los lados congruentes) (todos los ángulos congruentes)

cuadrados
(todos los lados congruentes,
todos los ángulos congruentes)

Tipos de cuadriláteros

Figura 1.32

Según lees de arriba a abajo, la Figura 1.32 va del tipo más general de cuadrilátero al más especializado. En particular:

- Todos los rombos son paralelogramos
- Todos los rectángulos son paralelogramos
- Todos los cuadrados son rombos
- Todos los cuadrados son paralelogramos
- Todos los cuadrados son rectángulos

Además de saber qué dicen estas afirmaciones, ¡también deberías saber lo que *no* dicen! Algunas veces es fácil confundir una afirmación de la forma

“Todo [algo] es [otra cosa].”
con su *contrario*
“Todo [otra cosa] es [algo].”

Cuando estás hablando acerca de cosas diarias sabes bien, que es fácil de mantener el sujeto y el predicado en su lugar. Por ejemplo, no confundirías:

“Todos los periquitos son aves”
con
“Todas las aves son periquitos.”

PICTURE

La primera afirmación es cierta, y la segunda es falsa, pero cuando estás estudiando cosas menos familiares, como los polígonos, la distinción entre una afirmación y su contrario puede que no sea tan obvia.

Una afirmación como: “Todos los periquitos son aves” es llamada una **afirmación universal**. Se *garantiza* que cualquier cosa del primer tipo es también del segundo tipo. Puedes probar que la afirmación es falsa solamente encontrando un sólo ejemplo donde la garantía fracasa –en el caso de: “Todos las aves son periquitos” solamente encuentra un ave que no sea un periquito– puede ser un petirrojo, un cuervo, una gallina, o un jilguero. Un ejemplo que prueba una afirmación universal es llamado un **contraejemplo**.

Aquí otra vez hay cinco afirmaciones universales acerca de cuadriláteros:

1. **Todos los rombos son paralelogramos**
2. **Todos los rectángulos son paralelogramos**
3. **Todos los cuadrados son rombos**
4. **Todos los cuadrados son paralelogramos**
5. **Todos los cuadrados son rectángulos**

Escribe el contrario para cada afirmación. Luego decide si su contrario es cierto o falso. Si piensas que es falso, encuentra o dibuja un contraejemplo. Si piensas que es cierto, explica por qué.

Nosotros comenzaremos. El contrario de la primera afirmación es "Todos los paralelogramos son rombos." ¿Piensas que esto es cierto? ¿Puedes encontrar un contraejemplo?

Nosotros hemos visto que varios tipos de cuadriláteros puede que tengan varias cantidades de simetría medidas al contar sus ejes de simetría. Nosotros consideramos que el cuadrado es el que más (4) tiene de cualquier cuadrilátero y es un ejemplo de un polígono regular. Nosotros sabemos que un triángulo equilátero es también un polígono regular, pero todavía no sabemos cómo reconocer polígonos regulares en general. Las siguientes preguntas te ayudarán a averiguarlo.

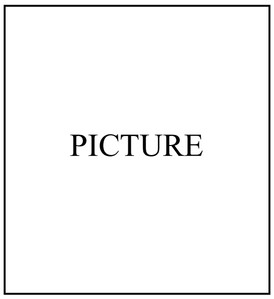
La figura en la Figura 1.33 es un pentágono *regular*.

1. **¿Cuántos lados tiene esta figura? ¿Son todos de la misma longitud?**
2. **El dibujo muestra un eje de simetría. Encuentra todos los que puedas.**
3. **Estos ejes de simetría son más parecidos a los de un triángulo equilátero que aquellos de cualquier cuadrilátero. Explica esta afirmación.**

Un pentágono regular

Figura 1.33

1. **Usa todos los polígonos regulares que has encontrado en el texto para hacer una tabla de dos columnas. Una columna de la tabla debe de mostrar cuántos lados tiene un polígono regular. La otra columna debe mostrar cuántos ejes de simetría tiene.**
2. **Usando esta tabla, ¿puedes llegar a hacer una conjetura como es la relación entre estos dos números? ¿Es tu conjetura cierta para los dos polígonos regulares en la Figura 1.34? Explica.**



Un octágono regular

Un nonágono regular

Figura 1.34

Conjunto de ejercicios: 1.4

1. **(a)** ¿Cuándo es un cuadrado un rombo?

(b) ¿Cuándo es un cuadrado un rectángulo?

(c) ¿Cuándo es un cuadrado un paralelogramo?

(d) ¿Cuando es un rectángulo un rombo?

(e) ¿Cuándo es un rombo un rectángulo?

(f) ¿Cuándo es un rectángulo un paralelogramo?

2. **(a)** Dibuja un rombo que tenga cuatro ejes de simetría.

(b) Dibuja un rectángulo que tenga cuatro ejes de simetría.

3. Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, mientras que un rombo solamente tiene dos. Un rectángulo también tiene dos ejes de simetría. Describe cómo los ejes de simetría para un rectángulo difieren de aquellos para un rombo.

4. **(a)** ¿Existe un cuadrilátero con exactamente *un* eje de simetría? Si es así, dibuja uno, si no es así, explica por qué no.

(b) ¿Existe un cuadrilátero con exactamente *tres* ejes de simetría? Si es así, dibuja uno, si no es así, explica por qué no.

5. Un rombo tiene un eje de simetría a través de cada par de vértices opuestos. Escribe una explicación de por qué un cuadrilátero con dos ejes de simetría *debe* ser equilátero.

6. Este problema hace referencia a la figura en la Figura 1.35.

(a) ¿Cuántos lados tiene esta figura? ¿Son todos de la misma longitud?

(b) ¿Cómo llamarías a esta figura?

(c) El dibujo muestra un eje de simetría. Encuentra tantos como puedas.

(d) ¿Piensas que esta figura es un polígono regular? Explica.

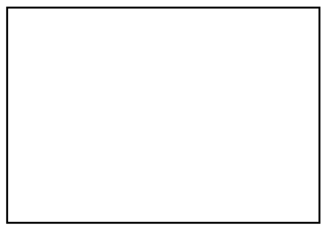


Figura 1.35

7. Fred dice que todos los polígonos equiláteros son polígonos regulares.

(a) ¿Puedes dar un contraejemplo para la afirmación de Fred? Esto es, ¿puedes encontrar un polígono equilátero que tenga *menos* simetría que otro polígono con el mismo numero de lados?

(b) ¿Qué es un contrario a la afirmación de Fred? ¿Es cierta? Da una explicación o un contraejemplo.

8. Freda dice que todos los polígonos equi*ángulares* son polígonos regulares.

(a) ¿Puedes dar un contraejemplo para la afirmación de Freda? Esto es, ¿puedes encontrar un polígono equilátero que tenga *menos* simetría que otro polígono con el mismo numero de lados?

(b) ¿Qué es un contrario a la afirmación de Freda? ¿Es cierta? Da una explicación o un contraejemplo.

9. **(a)** ¿Cómo están relacionados los ángulos de un polígono regular?

10. Encuentra un ejemplo de un tipo de oración en el texto de “Todas las *A* son *B*,” o escribe una.

(a) Encuentra un contrario a tu afirmación escogida.

(b) Encuentra un contrario al contrario.

(c) ¿Notaste algo? Explica.

11. Encuentra todos los ejes de simetría para los 11 polígonos en la Figura 1.36 y determina cuál es regular.

PICTURE

POLYGONS

Figura 1.36

12. El contrario de, “Si un triángulo tiene todos sus lados congruentes, también tiene todos sus ángulos congruentes” es: “Si un triángulo tiene todos sus ángulos congruentes, también tiene todos sus lados congruentes.”

(a) ¿Es la afirmación original cierta? Explica o da un contraejemplo.

(b) ¿Es el contrario cierto? Explica o da un contraejemplo.

(c) ¿Es cierta cualquiera de estas afirmaciones análogas? ¿Son ambas ciertas? Explica o da contraejemplos.