1.5 Las áreas de figuras de ángulos rectos

En secciones previas aprendiste acerca del perímetro de un polígono. Otra propiedad importante de figuras y superficies es el *área*. Si piensas en el perímetro como una medida del límite de un pedazo de tierra, puedes pensar en el área como la medida de cuánta tierra hay dentro del perímetro. Para comprar fertilizante para la grama o el jardín necesitas saber el área. Si quieres pintar o empapelar las paredes de una habitación, el área te dice cuanta pintura o papel necesitas comprar. Si quieres cubrir el suelo con losetas, alfombra o linóleo, necesitas saber su área.

Describe algunas otras situaciones en las cuales necesitas saber (o encontrar) el área de una región poligonal.

La Escuela Euclid tiene un Club de Fotografía. La escuela va a dejar que los miembros del club hagan un cuarto oscuro en un espacio de almacén un poco inusual. Ellos necesitan cubrir el suelo con losetas para protegerlo de posibles derrames de los químicos del cuarto oscuro. Uno de los conserjes les dio una muestra de una loseta cuadrada del tipo que ellos necesitan. Él dice que tratará de conseguirles suficientes losetas a los miembros del club para cubrir el suelo si ellos le dejan saber cuántas losetas necesitan. La Figura 1.37 es un dibujo hecho a escala, de la loseta que el conserje les dio a los estudiantes y del suelo que necesitan cubrir.

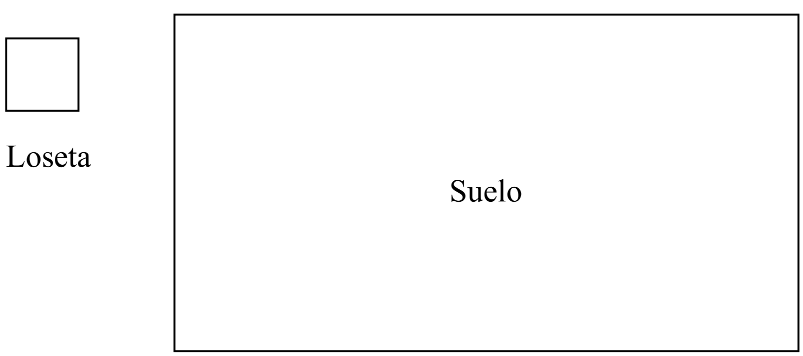


Figura 1.37

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Encontrar el área de una región rectangular al enlosarlo con unidades cuadradas de varios tamaños

Aproximar las áreas de otras regiones al enlosarlas con unidades cuadradas de varios tamaños

Encontrar el área de una región rectangular al medir sus lados usando una fórmula

Encontrar el área de un triángulo rectángulo al medir sus lados usando una fórmula.

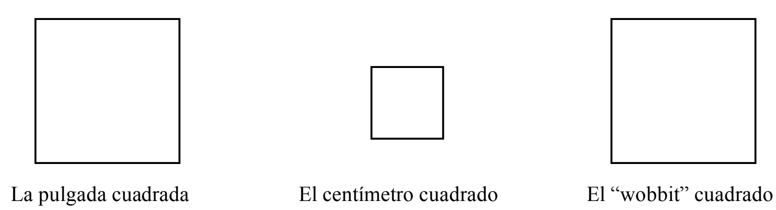
PICTURE

Algunas veces "sencillo" y "fácil" no son la misma cosa.

1. **¿Cuál es la manera más sencilla para encontrar cuántas losetas son necesarias? ¿Puedes pensar en una manera que le hiciera sentido a un niño típico de 6 años?**
2. **¿Cuál es la manera más fácil de encontrar cuántas losetas son necesarias? ¿Cómo lo harías si estuvieras en el club?**
3. **¿Cuántas losetas se necesitan? Explica por qué conseguirás la misma respuesta con la manera sencilla que con la manera más fácil.**
4. **¿Puedes pensar en cualquier razón para saber la manera más sencilla si conoces la manera más fácil?**

El ejemplo de enlosar el suelo que acabas de hacer es un problema de área. En ese caso, la loseta fue la unidad en la medida del área. Las unidades más comunes del área son los cuadrados de 1 por 1 basados en alguna unidad de longitud. Éste crea un enlace importante entre la medida de longitud y la medida de área. Podríamos escoger una unidad de área que es una pulgada o un centímetro o un "wobbit" en un lado. Entonces, llamaríamos a la unidad de área una *pulgada cuadrada*, un *centímetro cuadrado*, o un *"wobbit" cuadrado*. Véase la Figura 1.38. Pocas unidades de área, como lo es el acre, no tienen una relación sencilla a la unidad de longitud.

La medida del área es más fácil para un rectángulo. En ese caso, una fórmula sencilla te deja encontrar la cantidad de unidades cuadradas que necesitas sin tener que contar las losetas. Solamente mide el largo por el ancho y luego multiplica.



Unidades de área

Figura 1.38

Otra habitación está disponible como el posible cuarto oscuro para el Club de fotografía de la Escuela Euclid. Ésta mide 8 pies por 6 pies.

1. **Encuentra el área de esta habitación. ¿Qué unidad de medida estás usando?**
2. **¿Es el área de esta habitación más, menos, o alrededor de la misma área de la habitación original? ¿Por qué no puedes contestar esta pregunta?**
3. **El tamaño de la muestra de loseta del conserje es de 1 pie por 1 pie. ¿Cuál habitación tiene más área?**
4. **Encuentra el perímetro de esta habitación. ¿Es más, menos o alrededor del mismo perímetro de la habitación original? ¿Qué unidad de medida estás usando?**
5. **Escribe una fórmula para encontrar el área de un rectángulo. Asegúrate explicar qué significa cada variable y cómo las unidades de medidas están relacionadas.**
6. **Escribe una fórmula para encontrar el perímetro de un rectángulo. Asegúrate explicar qué significa cada variable y cómo las unidades de medidas están relacionadas.**

Puedes encontrar el área de un rectángulo contando los cuadrados o usando una fórmula. Cada método tiene sus ventajas y desventajas. Esta fórmula es fácil de usar si la recuerdas, pero solamente trabaja para los rectángulos. Contar es muy sencillo y trabaja para cualquier forma. Sin embargo, muchas formas no pueden ser cubiertas exactamente con números enteros de unidades cuadradas. Véase la Figura 1.39 para algunos ejemplos. En dichos casos, necesitamos estimar fracciones de una unidad.

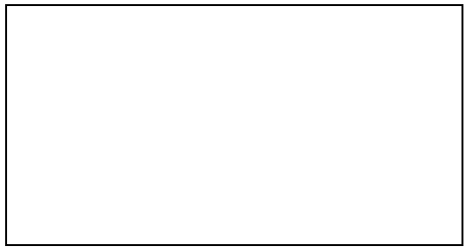


Figura 1.39

1. **Algunas de las figuras en la Figura 1.39 están cubiertas por unidades cuadradas enteras y partes de unidades cuadradas. ¿Cómo afectaría esto la manera en que encuentras el área de una figura? Explica.**
2. **Estima el área de cada una de las 10 figuras en la Figura 1.39. Clasifica cada una de tus estimados como “exacto,” “muy cerca,” o “muy desigual.”**

Aquí hay una manera para estimar el área de *cualquier* figura y tener una idea de la exactitud de la estimación. Usaremos el círculo en la Figura 1.39 como un ejemplo.

1. **Hay cuatro cuadrados pequeños que están completamente dentro del círculo. ¿Es 4 unidades cuadradas un buen estimado para el área dentro del círculo? Llamaremos a éste un *estimado interior*. ¿Es muy bajo o muy alto?**
2. **Puedes conseguir otro estimado del área del círculo contando todos los pequeños cuadrados que están *completos o parcialmente* dentro del círculo. ¿Cuántos de éstos hay allí? ¿Es éste un buen estimado del área dentro del círculo? Llamaremos a éste un *estimado exterior*. ¿Es muy bajo o muy alto?**
3. **Haz estimados internos y externos para el área de la figura en forma de nube en la Figura 1.39. Guarda tus respuestas para usarlas en el ejercicio 6 al final de esta sección.**

Una vez que tengamos estos dos estimados (interior y exterior), sabremos que el área correcta debe estar entre éstos. Si los estimados están cercanos unos a otros, sabremos que tenemos una idea bastante exacta del área. Si los dos estimados están muy separados, sabremos que solamente tenemos una idea desigual del área.

Sugerencia

Trata de mejorar los estimados.
Cada vez que hagas un estimado, trata de encontrar alguna manera de hacerlo *mejor*.

Encuentra los estimados interiores y exteriores para los tres triángulos en la Figura 1.39. Describe cualquier diferencia en la exactitud entre los estimados para estos tres rectángulos. ¿Puedes sugerir una manera para combinar los dos estimados de una sola figura para conseguir un estimado nuevo y más exacto? Si puedes, aplícalo a estos rectángulos.

Por supuesto, para los rectángulos la fórmula del área te da un resultado exacto *provisto que* sepas las longitudes exactas de los lados. En la Figura 1.39 la cuadricula te dice la longitud y la anchura exacta de uno de los rectángulos, pero no la de los otros dos. La exactitud de sus áreas calculadas por cualquier fórmula depende con cuánta precisión mediste los lados de estos rectángulos.

También podemos encontrar el área de los triángulos con esta fórmula. La fórmula para los triángulos está basada en la fórmula del área para los rectángulos. Esto es porque cada rectángulo puede ser dividido en dos triángulos conectando las vértices opuestas (véase la Figura 1.40) *y* cualquier triángulo puede ser relacionado a uno o dos de estos rectángulos de esta manera.

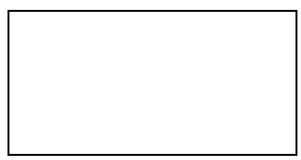


Figura 1.40

Para ver cómo esto trabaja, primero nota que cada uno de los triángulos en la Figura 1.40 incluye un ángulo recto que también es una esquina de un rectángulo. En un diagrama, un ángulo recto algunas veces es identificado poniéndole un pequeño cuadrado dentro de éste. Un triángulo que tiene un ángulo recto como uno de los tres ángulos es llamado un **triángulo rectángulo**. Entendemos que esto probablemente no es una gran sorpresa para ti; lo afirmamos aquí para asegurarnos que todos los términos que usamos estén claramente definidos.

¿Es posible hacer un triángulo que tenga dos ángulos rectos? Si es así, dibuja uno. Si no es así, explica por qué no se puede hacer.

Esta relación entre los triángulos rectos y los rectángulos nos lleva a una fórmula de área sencilla para los triángulos rectos. Cuando rompemos un rectángulo en dos triángulos rectos, como en la Figura 1.40, los triángulos están relacionados de una manera especial: estos son **congruentes**. Hasta ahora, solamente hemos definido congruencia para segmentos y para ángulos. Ahora extendemos esta idea para figuras planas de todo tipo.

Dos figuras son congruentes si puedes colocar (una copia de) una encima de otra en cierta manera que coincidan exactamente. Son parecidas excepto por sus posiciones en el plano. Para los polígonos esto significa que todos sus lados y todos sus ángulos deben ser congruentes. ¡También significa que deben ser iguales en área!

Estas preguntas hacen referencia a la Figura 1.40:

1. **¿Estás convencido que el Δ *ABC* y el Δ *CDA* son congruentes? ¿Cómo lo revisarías?**
2. **¿Cómo están relacionadas las áreas del Δ *ABC* y el Δ *CDA* una a otra? ¿Al área del rectángulo entero?**
3. **Explica cómo encontrar el área de uno de los triángulos si conoces el área del rectángulo entero.**
4. **¿Conoces el área del rectángulo entero? ¿Cómo la puedes encontrar?**
5. **Encuentra el área del rectángulo y el área de cada triángulo.**

¿Pero qué pasa si solamente tienes un triángulo rectángulo? ¿Cómo encuentras su área?

Explica cómo la Figura 1.41 te muestra una manera para encontrar el área de cualquier triángulo rectángulo. Esto es, provee las palabras que van con este dibujo.

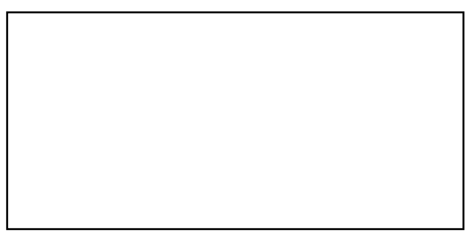


Figura 1.41

El lado más largo del triángulo rectángulo es llamado la **hipotenusa**. Es también el lado opuesto al ángulo recto. Los otros dos lados son llamados los **catetos** del triángulo rectángulo. La Figura 1.41 muestra algunas costumbres que muchas personas usan cuando rotulan un triángulo rectángulo:

- Los vértices están rotulados con una letra mayúscula, A, B y C, con C siendo el vértice del ángulo recto.
- Los lados están rotulados con letras minúsculas que representan, las longitudes de los lados. La letra minúscula usada para un lado generalmente corresponde a la letra mayúscula usada para el vértice opuesto.

Esta no es la única manera de rotular un ángulo recto, pero es la más común. El conocer esta costumbre te hará más fácil trabajar con otros libros de matemáticas y con pruebas estandarizadas.

Usando esta nota, podemos escribir una fórmula para el área de *cualquier* triángulo rectángulo. Las longitudes de los catetos son a y b, así que el área del triángulo debe ser la mitad del área del rectángulo con las longitudes de los lados a y b. Esto es, el área A del triángulo rectángulo es

$$A = \frac{ab}{2}$$

Los bordes de la vela triangular recta mide 7.2 pies, 9.6 pies, y 12 pies. ¿Cuál es el área de la vela? (*Pista*: Traza un dibujo y piensa acerca de los rectángulos.)

PICTURE

Ahora tenemos fórmulas de área para los rectángulos y los triángulos rectos. En la sección 1.7 verás cómo generalizar estas ideas para conseguir una fórmula para el área de *cualquier* triángulo. Las fórmulas pueden ser un atajo conveniente para encontrar las áreas de algunas figuras geométricas comunes, pero hay tantas figuras diferentes en el mundo que no podemos memorizar la fórmula de cada una. Para tantas otras figuras, todavía necesitarás el principio sencillo pero fundamental del cual comenzamos.

El área está basada en dividir en losetas una región con una unidad cuadrada.

Sugerencia

Toma notas minuciosamente. Cuando aprendas una fórmula o escribas una en tus notas, asegúrate de incluir la información que necesitas para usarlas correctamente:

- ¿Qué representan todas las variables?
- ¿Para qué se emplea la fórmula? Por ejemplo, esta fórmula de área se emplea para los triángulos *rectángulos*.

Encuentra las áreas de las regiones *A* hasta *I* de la Figura 1.42, contando cuántas veces puedes acomodar las unidades dadas en cada región. ¿Es útil aprender una fórmula para cada forma diferente?

Figura 1.42

Conjunto de ejercicios: 1.5

1. Este problema hace referencia a la Figura 1.43. Contesta estas preguntas acerca de los triángulos 1 al 6.

- **(a)** ¿Cuáles triángulos son congruentes al triángulo 0?
- **(b)** De los triángulos congruentes al triángulo 0, ¿cuál esta “volteado”?
- **(c)** De los triángulos que *no* son congruentes al triángulo 0, ¿cuáles son congruentes uno al otro?

Figura 1.43

2. (a) Hay 10 centímetros en un decímetro. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en un decímetro cuadrado? (*Pista*: Dibuja un diagrama.)

(b) Hay 100 centímetros en un metro. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en un metro cuadrado?

(c) ¿Cuántos milímetros hay en un centímetro? ¿Cuántos milímetros cuadrados hay en un centímetro cuadrado?

(d) ¿Cuántos milímetros hay en un metro? ¿Cuántos milímetros cuadrados hay en un metro cuadrado?

3. (a) Hay tres pies en una yarda. ¿Cuántos pies cuadrados hay en una yarda cuadrada? Haz un dibujo a escala.

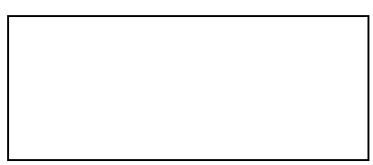
(b) ¿Cuántas pulgadas hay en un pie? ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en un pie cuadrado?

(c) ¿Hay 1,760 yardas en una milla? ¿Cuántas yardas cuadradas hay en una milla cuadrada?

(d) Para encontrar cuántos pies cuadrados hay en una milla cuadrada, ¿deberías multiplicar tu respuesta a la parte (c) por 3, por 6, por 9 ó por 12?

(e) Coteja tus respuestas a la parte (d) contestando estas preguntas: ¿cuántos pies hay en una milla? ¿Cuántos pies cuadrados hay en una milla cuadrada? ¿Qué consigues cuando divides este número de pies cuadrados por tu respuesta a la parte (c)? ¿Por qué esta respuesta debería ser la misma a tu respuesta a la parte (d)?

4. (a) Se necesita una lata de glaseado para cubrir la parte superior de un pastel de 8 pulgadas. Un pastel de 8 pulgadas es 8 pulgadas en cada lado. El Sr. Cardullo está haciendo un pastel de 16 pulgadas cuadradas para la fiesta de cumpleaños de su hija. ¿Cuántas latas de glaseado necesitará para cubrir la parte superior del pastel?



(b) Makeda quiere una alfombra de pared a pared para el piso de su sala, la cual es rectangular y mide 14 pies por 18 pies. La alfombra que ella quiere se vende por yarda cuadrada. ¿Cuántas yardas cuadradas necesitará?

5. Aquí están las medidas de las paredes y las ventanas de una habitación:

Pared 1. 14 pies por 11 pies, una puerta

Pared 2. 10 pies por 11 pies, una ventana

Pared 3. 10 pies por 11 pies, una ventana

Pared 4. 14 pies por 11 pies, sin ventana

Las ventanas son 4 pies por 2.5 pies y la puerta es 8 pies por 2.5 pies.

(a) Encuentra el área total de las paredes.

(b) La pintura viene en latas que cubren 300 pies cuadrados cada una. ¿Cuántas latas de pintura se necesitarán?

6. Encontramos que al cubrir una figura con cuadrados para poder encontrar su área, puede que no se consigan resultados exactos. Una manera para superar este problema es usando cuadrados más pequeños. Este problema te pide que trates ese método en la forma de nube de la Figura 1.39. Una ampliación de esa forma es mostrada en la Figura 1.44. El cuadrado en la parte inferior izquierda representa la unidad original; las nuevas unidades (los cuadrados pequeños en el cuadriculado) son una tercera parte de longitud en cada lado.

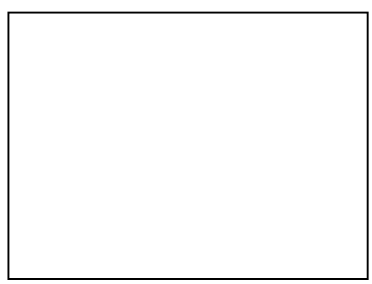


Figura 1.44

(a) Haz dos estimados del área de la Figura 1.44 contando los cuadrados pequeños que están

(i) completamente dentro de la nube;

(ii) completa o parcialmente dentro de la nube.

(b) Convierte tus estimados a las unidades originales.

(c) Compara tus nuevos estimados a los anteriores. ¿Cuáles dan mayor exactitud?

(d) Si esto no es lo suficientemente exacto, ¿qué puedes hacer?

7. La Figura 1.45 es otro dibujo de nuestro viejo amigo, el rombo. Tu maestro te dará una copia de esta figura para usar en este problema.

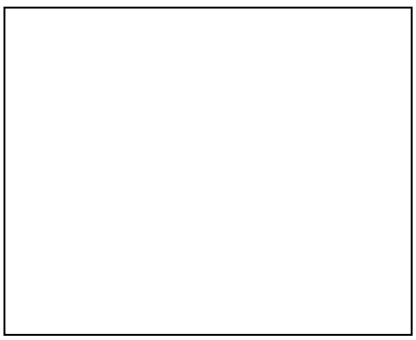


Figura 1.45

(a) Encuentra cuatro triángulos en la figura que sean todos congruentes unos a los otros. ¿Cómo sabes que todos son congruentes?

(b) Justifica la explicación de que estos cuatro triángulos son triángulos rectángulos.

(c) Al lado de cada uno de estos cuatro triángulos, dibuja otra copia congruente con la misma hipotenusa, como en la Figura 1.40. Cuando termines tendrás un rectángulo grande. Da una fórmula para el área de este rectángulo en términos de la longitud de las diagonales AC y BD.

(d) Usa tu resultado de la parte (c) para escribir una fórmula para el área de un rombo en términos de las longitudes de sus diagonales.

(e) ¿Puedes dar una fórmula para el área de un rombo en términos de justificar la longitud de sus lados? Si es así, hazlo. Si no es así, explica por qué.

8. **(a)** Diagrama la ecuación $y = 5$ en un plano de coordenadas de xy.

(b) Determina las coordenadas que faltan para los puntos (2, ?) y (10, ?) en la línea de la parte (a). Rotula estos puntos *M* y *N*, respectivamente.

(c) Ahora localiza los puntos (10, 0) y (2, 0) en tu gráfica. Rotula estos puntos *O* y *P*, respectivamente.

(d) Encuentra el área del rectángulo *MNOP*.

9. **(a)** Diagrama la ecuación $y = \frac{2}{3}x$ en un plano de coordenadas de xy.

(b) Determina las coordenadas que faltan para los puntos (6, ?) y (9, ?) en la línea de la parte (a). Rotula estos puntos *R* y *S*, respectivamente.

(c) Ahora localiza los puntos (9, 0) y (6, 0) en tu gráfica. Rotula estos puntos *T* y *U*, respectivamente.

(d) Encuentra el área del rectángulo *RSTU*.

PICTURE