

# 1.6 El área y el álgebra

---

En tus estudios pasados has visto cómo el hacer un dibujo o diagrama puede ayudarte a entender una idea mejor. Podemos usar dibujos para conectar la idea geométrica del área de algunas de las leyes de álgebra que estudiaste anteriormente en **MATH Connections**. En particular, las áreas de los rectángulos pueden ser usadas para mostrar cómo trabaja la Ley de Distribución.

Primero necesitamos revisar el significado de “una ley algebraica.” En esta sección, debemos considerar solamente leyes que son expresadas como ecuaciones. Por supuesto, no todas las ecuaciones merecen ser llamadas una ley de álgebra. Trata de encontrar lo que queremos decir sobre una ley a través de las siguientes preguntas y ejemplos.

**Estas preguntas son acerca de ecuaciones en una variable:**

- 1. ¿Qué quiere decir “solucionar” una ecuación? ¿Puede una ecuación en una variable tener más de una solución?**
- 2. Soluciona la ecuación  $x - 2 = 0$ . ¿Cuántas soluciones hay? Descríbelas.**
- 3. Soluciona la ecuación  $x^2 = 9$ . ¿Cuántas soluciones hay? Descríbelas.**
- 4. Soluciona la ecuación  $2x = x + x$ . ¿Cuántas soluciones hay? Descríbelas.**
- 5. Soluciona la ecuación  $\frac{x}{x} = 1$ . ¿Cuántas soluciones hay? Descríbelas.**
- 6. Dos de estas cuatro ecuaciones son diferentes de las otras dos de una manera esencial. ¿Cuáles son parecidas y cuáles son diferentes? Indica en tus propias palabras, ¿cuál es la diferencia clave?**

¿Cómo te fue? ¿Vistes las diferencias que separaron a las cuatro ecuaciones anteriores en dos tipos diferentes? Aquí está la idea que queremos que veas: algunas ecuaciones son ciertas para algunos números, pero otras ecuaciones son ciertas para *todos* los números para los cuales la ecuación no hace ningún sentido.

## Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Identificar identidad: algebraicas y ecuaciones con soluciones particulares.

Usar áreas de rectángulos para ilustrar una importante ley de álgebra.

Usar un diagrama para configurar un problema de álgebra en términos de área.

Por ejemplo, colocando cualquier número en

$$x - 2 = 0$$

nos da una afirmación que claramente es cierta o falsa, pero nosotros damos una afirmación falsa para cada sustitución excepto  $x = 2$ . Por otro lado,

$$2x = x + x$$

no solamente hace sentido para cada número, es cierta para todos ellos. La ecuación

$$\frac{x}{x} = 1$$

no hace sentido para  $x = 0$  porque la división por 0 no hace sentido. Sin embargo, para cada otro número, hace sentido y es cierta.

Llamamos al conjunto de todos los números para el cual una ecuación hace sentido (es cierta o falsa) su **dominio**. Este es como el dominio de una función. Una ecuación que es cierta para *todos* los números en su dominio es llamada una **identidad**. Por eso, las ecuaciones

$$2x = x + x \text{ y } \frac{x}{x} = 1$$

son identidades, pero las otras dos (en las preguntas 2 y 3)  $x - 2 = 0$  y  $x^2 = 9$  no lo son.

¿Cuáles de las siguientes son identidades? Para aquellas que no lo son, trata de encontrar *cualquier* valor para  $x$  que hace la ecuación cierta.

Equations 1 - 10

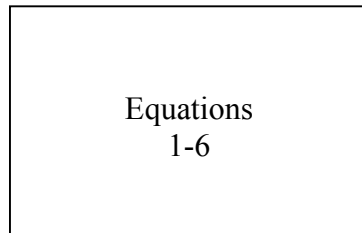
Podemos aplicar esta misma distinción a las ecuaciones que envuelven dos o más variables. La *ecuación*

$x \cdot (y - 4) = 0$  no es una identidad. Es cierto si  $x = 2$  y  $y = 4$ , pero no es cierta para  $x = 2$  y  $y = 3$ . De hecho, hay infinitamente muchos más números para los cuales es cierta y también infinitamente muchos más números para los cuales es falsa. ¿Ves por qué? Por otro lado, la ecuación  $xy - xy = 0$

es una identidad porque la ecuación siempre es cierta, sin importar cuáles números son sustituidos por  $x$  y  $y$ .

Podemos continuar encontrando identidades y soluciones para ecuaciones con cualquier número de variables. Los problemas prácticos en la industria pueden envolver miles de variables. Sin embargo, si entiendes el patrón para algunas variables, puedes utilizar cualquier número. Este es el poder de los patrones.

**¿Cuál de las siguientes ecuaciones son identidades? ¿Tienen nombre algunas de las identidades? Si es así, ¿cuáles son? Encuentra por lo menos una solución y una que no es solución para cada ecuación que no es identidad.**



En álgebra, una ley es una identidad que las personas consideran importante. La mayoría de las identidades no son lo suficientemente importante para ser llamadas leyes de álgebra. Por ejemplo,

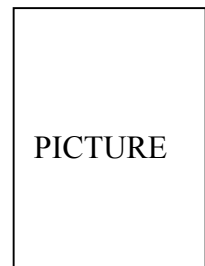
$$10^{-1} \cdot 34.96^0 x = 0.1x$$

es una identidad, pero no una que vale la pena memorizar. Por lo contrario, las variadas formas de la Ley Distributiva surgen y son usadas todo el tiempo. Vale la pena conocer dichas leyes.

Ahora que tienes una mejor idea de lo que son las leyes algebraicas, podemos investigar un ejemplo que muestra una conexión útil entre el área de un rectángulo y la Ley Distributiva.

$$x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot z$$

Hace muchos años, la Sra., Bocciarelli heredó un pequeño pedazo de terreno en una popular área de vacaciones. Ella ha estado guardando para construir una pequeña cabaña de veraneo en este terreno. Ayer recibió una carta de uno de sus vecinos. Ellos tienen una pequeña cabaña en la propiedad al lado de la de ella. Ahora se van a retirar y construir una casa en la propiedad. Ellos iban a destruir su vieja cabaña de veraneo, pero pensaron que tal vez la Sra. Bocciarelli quisiera comprarla. Ellos le han ofrecido venderle su cabaña y una pequeña parte de su terreno donde se encuentra la cabaña.



La Figura 1.46 es un mapa de estos dos pedazos de terreno.

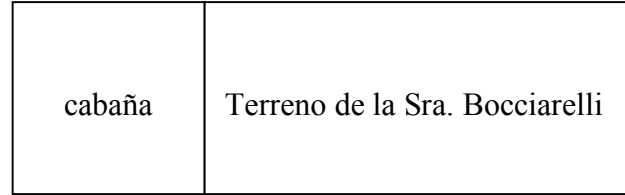


Figura 1.46

La propiedad original de la Sra. Bocciarelli es un rectángulo de 104' por 52'. El terreno que sus vecinos han ofrecido venderle es un rectángulo adjunto que mide 46' por 52'. Ella quiere comprar la cabaña, pero la venta tiene que ser aprobada por el consejo local de zonas. Ellos quieren saber el área total del terreno envuelto en esta transacción.

- 1. Encuentra el área del pedazo de terreno original de la Sra. Bocciarelli, en pies cuadrados.**
- 2. Encuentra el área total del terreno que poseerá la Sra. Bocciarelli después de comprar la cabaña y el terreno de sus vecinos. Expresa tu respuesta en pies cuadrados.**

¿Cómo calculaste el área total de los terrenos combinados? Hay dos maneras de hacer esto:

- Puedes pensar en su terreno como hecho de dos terrenos separados, uno de 104' por 52', y el otro de 46' por 52'. Puedes encontrar el área de los terrenos por separado y luego sumarlos.
- Podrías sumar las dos longitudes horizontales para conseguir la longitud total de un lado del terreno combinado,  $104' + 46' = 150'$ . Luego puedes multiplicar eso por el ancho, 52', para conseguir el área total.

¿Qué hiciste?

**Usa tu calculadora para hacer los siguientes dos cálculos. Asegúrate de hacerlo exactamente como se muestra.**

$$104 * 52 + 46 * 52$$

$$(104 + 46) * 52$$

**¿Cómo se comparan los dos resultados? ¿Qué pasa si dejas los paréntesis afuera?**

Al medir áreas, es fácil ver que deberíamos conseguir el mismo resultado para ambos  $104 \cdot 52 + 46 \cdot 52$  ó  $(104 + 46) \cdot 52$ . De hecho, deberíamos conseguir los mismos resultados en ambas maneras sin importar los tamaños particulares de los terrenos. Podríamos reemplazar 104, 52, y 46 con cualquier otro número positivo. Esta afirmación general es la Ley Distributiva,

$$x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot z$$

En términos de la propiedad de la Sra. Bocciarelli, la Ley Distributiva dice que podemos encontrar el área del terreno de dos maneras:

- Encuentra las cantidades en la manera  $x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot z$  del área de cada pedazo de terreno y suma esas áreas.
- Encuentra las cantidades en la manera  $(x + y)$  de las dimensiones del nuevo terreno primero, y luego encuentra su área.

Una diferencia práctica entre estos dos métodos es que la primera requiere dos multiplicaciones mientras que la segunda requiere solamente una. Esto hace que el segundo método sea más fácil si tienes que hacer los cálculos sin una calculadora. Puede que pienses que no tenemos que preocuparnos sobre eso con la tecnología de hoy en día, pero el hecho es que el uso de las computadoras nos ha llevado a tener más preocupaciones acerca de la velocidad de un algoritmo. Generalmente, las multiplicaciones toman más tiempo que las sumas en una computadora así que los científicos de computadoras solamente cuentan las veces que se necesita hacer multiplicaciones e ignoran el número de sumas. Si podemos usar la Ley Distributiva para acortar el número de multiplicaciones de un cálculo largo en la mitad, eso debería de ahorrar mucho tiempo.

El mapa de la propiedad de la Sra. Bocciarelli es una ilustración geométrica de una forma de la Ley Distributiva. Claro, no necesitas la cabaña o la historia. La figura por sí misma es una interpretación geométrica que puede fortalecer tu entendimiento de la ley y mostrar cómo se aplica a la geometría. Las siguientes preguntas te ayudarán a revisar y extender esas ideas.



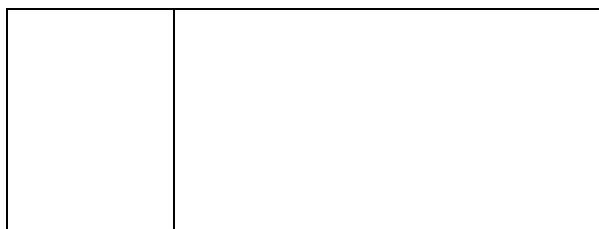


Figura 1.47

Estas preguntas hacen referencia a los rectángulos en la Figura 1.47. En ese diagrama,  $x$  es la longitud de  $BE$ ,  $y$  es la longitud de  $DE$ , y  $z$  es la longitud de  $EF$ . Presenta tus respuestas en términos de  $x$ ,  $y$ , y  $z$ .

1. ¿Cuán largos son los segmentos  $AB$ ,  $AD$ ,  $BC$  y  $AC$ ?
2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo pequeño,  $ACFD$ ? ¿Cuál es su área?
3. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo pequeño,  $ABED$ ? ¿Cuál es su área?
4. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo  $BCFE$ ? ¿Cuál es su área?
5. Usa tus respuestas a las preguntas 2, 3 y 4 para explicar cómo la Figura 1.47 muestra la Ley Distributiva. Asegúrate de presentar la ley en forma algebraica como parte de tu explicación.
6. ¿Ilustra este diagrama la Ley Distributiva para todos los nombres de su dominio, o solamente para algunos números? Explica tu respuesta.

Cuando la Sra. Bocciarelli llevó su plan al consejo de zonas, ellos le dijeron que no podía tener su cabaña en su terreno a menos que fuera dueña de por lo menos  $\frac{1}{5}$  de un acre. Su plan no le da un pedazo de terreno lo suficientemente grande.

1. Un acre es 43,560 pies cuadrados. ¿Cuántos pies cuadrados de terreno necesita la Sra. Bocciarelli en total?
2. Ella quiere ver si puede comprar un pedazo de terreno que sea lo suficientemente largo para satisfacer el consejo de zona. Para encontrar cuánto ella necesita, ella dibuja el diagrama mostrado en la Figura 1.48

Expresa el área total del rectángulo grande como una función de  $y$ . ¿Cuál es la unidad de medida?

3. Usa las respuestas de los ejercicios 1 y 2 para encontrar cuánto largo será el pedazo de terreno que necesitaría comprar la Sra. Bocciarelli a sus vecinos. Redondea tu respuesta hasta el pie *más* cercano. ¿Por qué hasta el pie más cercano?
4. ¿Usaste la Ley Distributiva? Si fue así, ¿cómo?

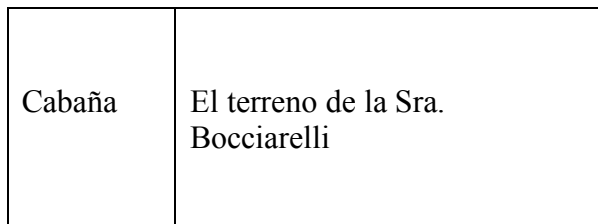
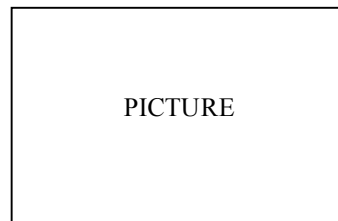


Figura 1.48

Los vecinos no quieren venderle tanto terreno a la Sra. Bocciarelli porque el límite de su terreno quedaría muy cerca de la casa que planifican construir. Ella podría conseguir una suspensión en sus impuestos y seguro si su propiedad es  $\frac{1}{10}$  de un acre o menos, así que ahora ella está pensando en venderle a sus vecinos un pedazo de terreno de 52 pies de borde de su propiedad para reducir el área a  $\frac{1}{10}$  de un acre. Este será suficiente para acampar de vez en cuando.



**¿Cuánto terreno debe vender la Sra. Bocciarelli?**

1. Supón que vende un pedazo  $w$  pies de ancho. Expresa el área del pedazo de terreno que sobra como una función de  $w$ .
2. Usa el álgebra, incluyendo la Ley Distributiva, para solucionar el último problema de la Sra. Bocciarelli. Señala dónde usas la Ley Distributiva.

En este último ejercicio, usaste una forma de la Ley Distributiva que relaciona la multiplicación a la resta. Hay varias formas de la Ley Distributiva, pero no tantas como parece. La mayoría de ellas son solamente variaciones de otra. Lo importante acerca de *cualquier* forma de la Ley Distributiva es que ésta relaciona dos operaciones. La primera que usamos en esta sección relaciona la multiplicación a la suma.

Aquí hay otro ejemplo de cómo las áreas de los rectángulos pueden ayudarte a entender expresiones algebraicas. ¿Piensas que

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

es una identidad? Tal vez sí, tal vez no. Una manera de convencerte a ti mismo es trabajando el álgebra, paso por paso, hasta que los dos lados de la ecuación sean iguales. Pero primero observa el dibujo que debería de aclarar la respuesta.

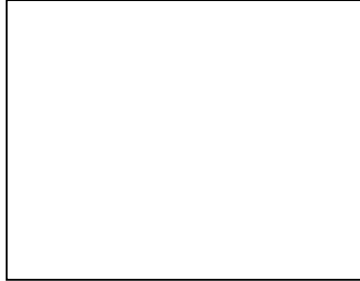


Figura 1.49

**Lo siguiente hace referencia a la Figura 1.49, en donde todos los ángulos son ángulos rectos:**

**1. Escribe una expresión algebraica para representar cada uno de los siguientes objetos:**

- (a) las longitudes de  $AC$  y  $AG$
- (b) el área del cuadrado  $ACJG$
- (c) el área del cuadrado  $ABED$  (región I)
- (d) el área del rectángulo  $BCFE$  (región II)
- (e) el área del rectángulo  $DEHG$  (región III)
- (f) el área del cuadrado  $EFJH$  (región IV)

**2. Relaciona tus respuestas a la parte previa de la ecuación**

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

**¿Es esta ecuación una identidad? ¿Por qué sí o por qué no?**

Puede que no sea obvio para ti que este ejemplo esté relacionado a la Ley Distributiva, pero lo está. De hecho, puede que pienses en la Figura 1.49 como un dibujo de cómo la Ley Distributiva trabaja en este caso.

¿Sabías que  $(x + 3)^2$  es una abreviatura para  $(x + 3) \cdot (x + 3)$ ? Ahora piensa en la primera copia de  $(x + 3)$  como una cosa sencilla,  $t$ . Luego, debido a la Ley Distributiva, tenemos

$$(x + 3)^2 = t \cdot (x + 3) = t \cdot x + t \cdot 3$$

Ahora vuelve a colocar  $(x + 3)$  para  $t$ . Obtienes

$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot x + (x + 3) \cdot 3$$

Usa otra vez la Ley Distributiva en cada pieza de esta suma.

$$(x + 3)^2 = x \cdot x + 3 \cdot x \cdot x \cdot 3 + 3 \cdot 3$$

Finalmente, ordena el lado derecho de esta ecuación, usando el hecho de que la suma y la multiplicación son conmutativas.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 3x + 3x + 9$$

Claro que,  $3x + 3x = 6x$ , así que ¡aquí la tienes!

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Este ejemplo también nos enseña algo sobre cuándo la distribución *no* trabaja. Los exponentes *no* son distributivos sobre la suma. Esto es, NO PUEDES volver a escribir  $(x + 3)^2$  como  $x^2 + 3^2$  y esperar conseguir lo mismo. La Figura 1.49 debería de convencerte de eso.  $(x + 3)^2$  es el área completa de un cuadrado grande, pero  $x^2 + 3^2$  es solamente el área de las regiones I y IV, dos cuadrados pequeños. Los dos pedazos rectangulares de las regiones II y III se han dejado afuera.

**¿Puedes generalizar los dos métodos que acabas de ver a los productos que no son exactamente cuadrados? Trátalo.**

**Considera la expresión  $(x + 2) \cdot (x + 5)$ .**

- 1. Dibuja un diagrama como el de la Figura 1.49 que ilustra lo que debes conseguir cuando conviertes esa expresión a la forma  $\_\_x^2 + \_\_x + \_\_$ .**

**(Pista: Necesitarás comenzar con un rectángulo.)**

- 2. Usa la Ley Distributiva para multiplicar esta expresión. ¿Está de acuerdo tu resultado con lo que conseguiste en el ejercicio 1? Debería estarlo.**

### Conjunto de ejercicios: 1.6

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son identidades? ¿Tienen nombre alguna de las identidades? Si es así, ¿cuáles son? Encuentra por lo menos una con solución y una sin solución para cada ecuación que no es una identidad.

EQUATIONS  
(a) to (f)

2. Para cada parte, encuentra las áreas de las regiones rectangulares I, II, III y IV. Entonces usa estas áreas para expresar el área del cuadrado grande algebraicamente de dos maneras diferentes.

RECTANGULAR REGIONS  
(a) to (d)

3. Para cada parte, haz un diagrama que te ayude a escribir una forma equivalente de la expresión dada. Luego usa la Ley Distributiva para mostrar algebraicamente que las dos formas son equivalentes.

EXPRESSIONS  
(a) to (d)

4. Dibuja un diagrama para explicarle a un amigo por qué  $(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$ . ¿Cuál es la diferencia entre los dos lados de esta expresión? Describe esta diferencia de manera geométrica y algebraica.
5. La Sra. Álvarez tiene una habitación rectangular grande, 12 pies por 30 pies, que sirve se sala y de comedor. Ella quiere instalar una alfombra de pared a pared en el área del comedor al final de la habitación. ¿Cuán grande ella puede hacer el comedor y todavía dejar 210 pies cuadrados de espacio sin alfombra en la sala? Dibuja un diagrama para ilustrar tu trabajo. Asegúrate de definir cualquier variable que uses.
6. La Figura 1.50 es una ilustración de  $(x + 3y + 5)^2$ . Está subdividida en nueve regiones rectangulares. Las expresiones para tres de estas áreas ya han sido completadas.
- (a) Copia este diagrama y completa las expresiones para el resto de las áreas.
- (b) Usa tus respuestas para la parte (a) para volver a escribir  $(x + 3y + 5)^2$  en una forma que no necesite paréntesis. Escribe tu nueva expresión con el menor número de términos separados como te sea posible.

PICTURE