

1.7 Los triángulos y la triangulación

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Construir un triángulo de las longitudes de sus lados

Construir todas las altitudes de un triángulo

Encontrar el área de cualquier triángulo rompiéndolo en triángulos rectángulos

Explicar y usar una fórmula para encontrar el área de cualquier triángulo

Encontrar el área de cualquier polígono dividiéndolo en regiones triangulares.

Lo primero que aprenderás en esta sección es cómo usar un compás y una regla para hacer dibujos de varios triángulos con precisión. Hay muchas razones por las cuales ésta es una destreza de valor. Si quieres discutir una figura geométrica en términos generales, un boceto desigual puede ser lo suficientemente bueno. Si quieres determinar los ejes de simetría o tratar de encontrar si un ángulo es un ángulo recto, necesitarás un dibujo preciso. Si quieres solucionar un problema de la vida diaria haciendo un dibujo a escala y midiendo sus partes, ¡necesitas un dibujo *muy* preciso!

Hay también muchos usos para dibujos precisos fuera de la escuela. Los edificios y las partes mecánicas son generalmente hechos de dibujos precisos a escala. Muchas pinturas y diseños gráficos comienzan con cuidadosos dibujos de líneas a los cuales se le añade más adelante color o pintura. Hay hasta un algoritmo para encontrar el área de una región irregular usándose dibujos precisos a escala.

Como primer ejemplo, construiremos un triángulo en el cual sus tres lados sean 3, 4 y 5 “wobbits” de longitud. ¿Te acuerdas de los “wobbits”? Usamos “wobbits”, en vez de pulgadas o centímetros, porque queremos desalentarte el medir las longitudes con una regla. El medir envuelve mucha aproximación “a ojo” que es tan confiable como el proceso de construcción que utilizamos.

El wobbit, una unidad de longitud

Figura 1.51

Saca el compás y la regla (al usar la regla, ignora las marcas) y trabaja junto con el texto. Tu meta es dibujar un triángulo, ΔABC , con las longitudes de los lados de 3, 4 y 5 “wobbits”.

1. Comienza dibujando un segmento de línea de más de 5 “wobbits” de largo. (Estimado.) Escoge un extremo como el vértice de un triángulo y rotúlalo A . Luego usa tu compás para marcar 5 “wobbits” a lo largo de la línea, comenzando en A . Usa el “wobbit” oficial en la Figura 1.51 para ajustar tu compás. Rotula el quinto “wobbit” como punto B . En esta etapa, tu dibujo debería de verse como

la Figura 1.52, pero más grande. (El texto ilustra uno más pequeño que el triángulo actual que estás construyendo.)



Figura 1.52

2. Ahora usa la línea marcada para ajustar tu compás en 3 “wobbits”. Coloca el punto del compás en A y márcalo en un arco de puntos que estén a 3 “wobbits de A , como en la Figura 1.53.

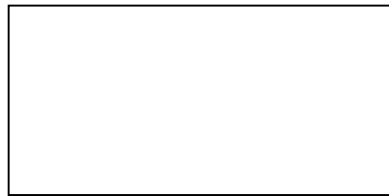


Figura 1.53

3. Luego, ajusta tu compás para 4 “wobbits”. Coloca el punto en B , y dibuja un arco de puntos de 4 “wobbits” desde B , como en la Figura 1.54. Este arco debería cruzar tu arco centralizado en A . Si no lo hace, regresa uno o dos pasos y extiende los dos arcos hasta que se crucen. Rotula el punto de cruce como C . Actualmente, si extiendes los arcos lo suficiente, estos se cruzarán en *dos* puntos, uno arriba de la línea AB y uno debajo de ésta. Cualquiera de los dos funcionará para lo que queremos.



Figura 1.54

4. Nota que C está exactamente 3 “wobbits” alejado de A (porque están en el arco centralizado en A), y está exactamente 4 “wobbits” alejado de B . ¿Por qué? Usa tu regla para dibujar los segmentos AC y BC , ¡y ya terminaste! El ΔABC tiene lados con las longitudes 3, 4 y 5 “wobbits.”

Usa el procedimiento acabado de describir para construir triángulos con las siguientes longitudes de lados:

1. 4 “wobbits”, 2 “wobbits”, y 3 “wobbits”
2. 2 “wobbits”, 5 “wobbits”, y 4 “wobbits”
3. 4 “wobbits”, 3 “wobbits”, y 5 “wobbits”
4. 5 “wobbits”, 3 “wobbits”, y 3 “wobbits”

¿Es alguno de estos triángulos el mismo al triángulo de la Figura 1.54? Si es así, ¿de qué manera son iguales? Explica.

Supón que se te da un *triángulo* y necesitas construir un nuevo triángulo congruente al viejo. Esto puede pasar en un dibujo artístico o de ingeniería si quieres repetir el mismo triángulo en varios lugares. Puedes construir el triángulo nuevo sin usar una regla para medir los lados. Solamente usa el triángulo dado para ajustar tu compás.

Construye un triángulo congruente al de la Figura 1.55. Escribe tus pasos en orden. Cuando hayas acabado, revisa con algunos de tus compañeros de clase para ver si todos tienen el mismo triángulo. ¿Comenzaron todos la construcción con el mismo lado? ¿Usaron todos la misma secuencia de pasos?

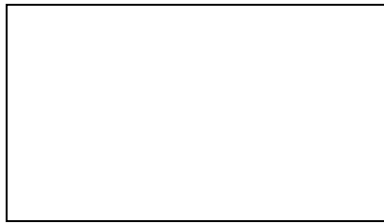


Figura 1.55

Ahora sabes cómo construir un triángulo de las longitudes de tres lados, sea copiando otro triángulo o midiendo los lados en términos de la unidad de longitud. Pero una pregunta importante se mantiene sin contestar. ¿Es posible construir dos triángulos *diferentes* con las mismas tres longitudes de los lados?

¿Es posible? Antes de que te apresures a contestar la pregunta, ésta necesita un poco de afinamiento.

- 1. Piensa en un significado para *diferente* que te permita contestar Sí. Luego da un ejemplo de dos triángulos con las mismas tres longitudes de lados que son diferentes de acuerdo a tu significado de la palabra.**
- 2. ¿Cómo sería, si *diferente* significara que no es congruente? ¿Hay dos triángulos con las mismas tres longitudes de lados que no coinciden, sin importar cuánto trates de colocar uno encima del otro? Si es así, da un ejemplo. Si no piensas que es posible, justifica tu opinión con un argumento persuasivo.**

Los triángulos ocupan un lugar especial en el mundo de los polígonos. Estos son los únicos polígonos los cuales su tamaño y forma son completamente determinados por las longitudes de sus lados. Ya tú encontraste esto, ¿no es así? Además, cualquier región poligonal puede ser rota en regiones triangulares, como verás más adelante en esta sección. Esto significa que, si podemos encontrar el área dentro de *cualquier triángulo*, también sabremos como encontrar el área dentro de *cualquier polígono*.

En la Sección 1.5 aprendiste cómo encontrar el área de un triángulo rectángulo. Ahora combinamos esa destreza con la de construir una perpendicular desde un punto a una línea (de la Sección 1.3) para encontrar el área de *cualquier* triángulo. La clave para este proceso es un segmento de línea llamado una *altitud*.

Términos a conocer: La **altitud** de un triángulo es un segmento de línea que es dibujado de un vértice a la línea del lado opuesto y la cual se encuentra con esa línea en los ángulos rectos. Si la altitud cae dentro del triángulo, luego el lado opuesto es llamado la **base** para esa altitud.

.....

La Figura 1.56 muestra la altitud y la base para un triángulo típico. También te muestra por qué estamos interesados en esta línea: Divide este triángulo en dos triángulos rectángulos, los cuales ya sabemos como manejarlos.

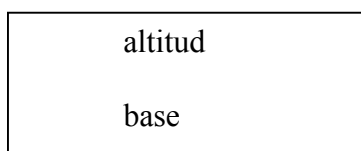


Figura 1.56

Términos

La *altitud* de un aeroplano en vuelo es su distancia vertical sobre el nivel del mar.

¿Piensas que la altitud y la base son buenos nombres para estos segmentos de línea? ¿Puedes pensar en otros nombres que te gustarian más? Defiende tus respuestas.

Un triángulo actualmente tiene tres altitudes, una para cada vértice. Algunas veces una altitud cae fuera del triángulo. La Figura 1.57 muestra las tres altitudes para ΔRST , dos de ellas fuera del triángulo.

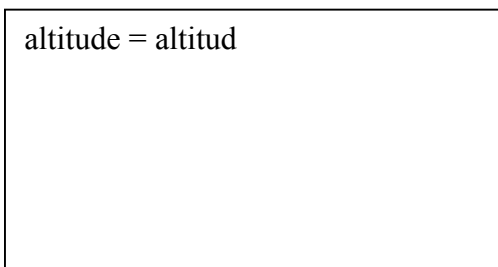
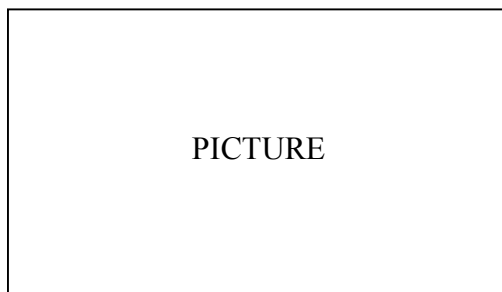


Figura 1.57

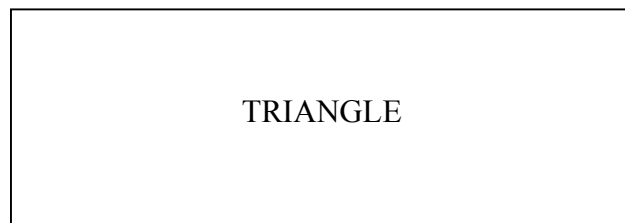
No es posible para las tres altitudes caer fuera del triángulo. Si usas el lado más largo como la base, la altitud siempre estará adentro. Esto significa, que para cualquier triángulo, siempre hay por lo menos una altitud que la divide en dos triángulos rectángulos, como en la Figura 1.56. Nosotros usamos esta altitud para el diagrama que nos lleva a la fórmula general para el área de un triángulo.

Ya que sabes como hacer todas las piezas de este proceso, te dejaremos colocarlo junto. Las siguientes preguntas te guiarán paso a paso.



1. En una hoja de papel en blanco, usa el compás y la regla para construir un triángulo, ΔABC , con las longitudes de lados siguientes: $AB = 7.5$ cm., $AC = 10$ cm., y $BC = 5$ cm. Coloca el lado AC en el fondo (horizontalmente), para que el vértice B esté arriba. Coloca el dibujo en el medio del papel, con muchos espacios alrededor de éste.
2. Dibuja la altitud del vértice B , usando el método de construcción para dejar caer una perpendicular de un punto a una línea. Véase la Sección 1.3 si necesitas refrescar tu memoria. Rotúlala como el punto D en la cual la altitud se encuentra con la base.
3. Para referencia, marca cada segmento de tu figura con una letra minúscula para representar su longitud, como se muestra en la Figura 1.58
4. Mide tu figura tan precisa como puedas para encontrar las longitudes de d , e , y h . Ya deberías conocer las longitudes de a , b , y c . ¿Cuáles son? Nota que $d + e$ deberían igualar a b . ¿Es así? Si no es así, revisa tus medidas.
5. Expresa las áreas del ΔABD y del ΔBCD en términos de las letras de tu diagrama. Explica por qué tus respuestas hacen sentido. Luego calcula estas dos áreas de tus medidas.
6. Calcula el área del ΔABC de tus respuestas numéricas en el ejercicio 5.
7. Usa la Ley Distributiva para mostrar como tus respuestas algebraicas de la parte 5 dicen que el área del ΔABC es $\frac{1}{2}bh$.

Guarda este diagrama. Necesitarás usarlo otra vez muy pronto.



Esta es una guía para rotular, no está dibujado a una escala exacta.

Figura 1.58

Las personas, siguiendo las mismas direcciones, pueden obtener resultados muy diferentes de las mediciones y las aproximaciones, aún cuando ellas sean cuidadosas. En dichos casos, las herramientas de análisis de datos pueden ayudar a que los resultados sean más confiables.

1. Recoge las respuestas del área del ΔABC de todos en la clase. Haz una gráfica de tallo y hojas y un diagrama de caja de estos datos.
2. Encuentra la media y la desviación estándar de estos datos.
3. En este caso, ¿piensas que la media y la mediana es una mejor medida del área actual de un triángulo con longitudes de los lados de 5 cm., 10 cm., y 7.5 cm.? (*Pista: Pregúntate: ¿hay algún valor atípico en este conjunto de datos? Si es así, ¿cómo afectan la media y la mediana?*)

Datos a conocer: El área de un triángulo puede ser encontrado calculando $\frac{1}{2}bh$, donde h es la longitud de cualquier altitud y b es la longitud de la base para esa altitud.

.....

Ahora que ya has trabajado esta fórmula por ti mismo, deberías poder explicar como se encuentran las áreas de los rectángulos y los triángulos rectángulos. Esto te ayudará a recordar lo que dice la fórmula y saber cómo se usa.

Solamente hay un problema aquí: Nuestro desarrollo de esta fórmula depende en tener la altitud *dentro* del triángulo. Pero la afirmación de esta fórmula dice que h puede ser “la longitud de cualquier altitud.” ¿Qué pasa si la altitud está afuera del triángulo? ¿Funciona todavía la fórmula?

Saca tu papel con la construcción del ΔABC .

1. Construye la altitud del vértice C extendiendo el lado AB y dejando caer una perpendicular en ésta. Véase la Figura 1.57 para ayudarte a visualizarlo.
 - (a) ¿Cuál es la base para esta altitud?
 - (b) Mide esta altitud y su base cuidadosamente. Luego calcula el área del triángulo, aplicando la fórmula a estas dos longitudes.

(c) **¿Tus resultados están de acuerdo con tus contestaciones previas para esta área? Si no es así, ¿piensas que es lo suficientemente cerca para estar dentro de la medida de error?**

2. Ahora construye la altitud del vértice A , mide el vértice y su base, y usa la fórmula del área otra vez. ¿Tus resultados están de acuerdo con tus contestaciones previas para esta área? Explica cualquier diferencia.

En los ejemplos previos viste que la fórmula del área para los triángulos trabaja aún si la altitud que escogiste está afuera del triángulo. El ejercicio 8 en el **Conjunto de ejercicios** al final de esta sección, te guía a través de una prueba algebraica del hecho de que ésta siempre trabaja. Ahora es tiempo de considerar polígonos con más lados.

Revisemos lo que hemos hecho hasta ahora con el área. Encontramos que los rectángulos son fáciles de trabajar. Luego encontramos que podríamos trabajar con *cualquier* triángulo relacionándolo con un rectángulo. Finalmente, encontramos que podemos trabajar *cualquier* triángulo relacionándolo con un triángulo rectángulo y después con un rectángulo. Ahora veremos como encontrar el área de *cualquier* polígono dividiéndolo en triángulos. La Figura 1.59 muestra el ejemplo con el que trabajaremos.

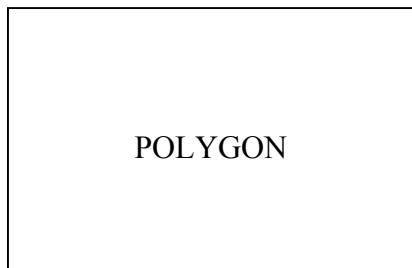


Figura 1.59

**¿Cuántos lados tiene el polígono en la Figura 1.59?
¿Cómo lo llamarías? ¿Es regular?**

Podemos usar un algoritmo –procedimiento paso a paso– para dividir el polígono en la Figura 1.59 en triángulos.

De esta forma trabaja el algoritmo. Tu maestro te dará una copia más grande de la Figura 1.59. Úsalo para seguir los pasos enumerados abajo. Según hagas cada paso, copia y completa el artículo correspondiente en la columna de los Resultados.

Pasos	Resultados
1. Escoge un vértice para comenzar.	1. Yo escogí el vértice _____ como mi vértice de comienzo
2. Escoge una dirección para caminar alrededor del polígono.	2. Yo escogí comenzar caminando hacia el vértice _____.
3. Camina alrededor del polígono hasta el segundo vértice pasando el vértice del comienzo.	3. Yo me detuve en el vértice _____.
4. Traza la diagonal desde ese vértice hasta el vértice del comienzo.	4. Yo dibujé la diagonal _____.

La Figura 1.60 muestra uno de los autores trabajando a través de estos pasos. Si haces elecciones diferentes, tu diagrama puede verse diferente. Eso está bien.

Resultados
1. Yo escogí el vértice <u>F</u> como mi vértice de comienzo.
2. Yo escogí comenzar caminando hacia el vértice <u>A</u> .
3. Yo me detuve en el vértice <u>B</u> .
4. Yo dibujé la diagonal <u>BF</u> .

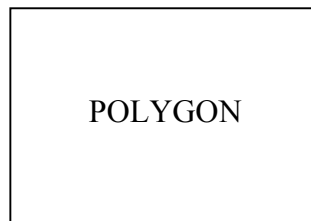


Figura 1.60

Comenzamos con el hexágono $ABCDEF$. Ahora lo hemos dividido en un triángulo FABuloso (sabemos como encontrar su área) y el polígono $FBCDE$.

¿Cuántos lados tiene $FBCDE$? ¿Cómo se llama este tipo de polígono? ¿Es regular? ¿Qué letras nombran el polígono correspondiente en tu diagrama? ¿Cuántos lados tiene?

Ahora ignoramos el triángulo que cortamos (por el momento) y nos enfocamos en el polígono sobrante. Cortamos otro triángulo aplicando el mismo algoritmo como hicimos anteriormente.

Aplica los pasos enumerados a tu pentágono sobrante. Según hagas cada paso, copia y completa el artículo correspondiente en la columna de los Resultados.

Pasos	Resultados
1. Escoge un vértice para comenzar.	1. Yo escogí el vértice _____ como mi vértice de comienzo.
2. Escoge una dirección para caminar alrededor del polígono.	2. Yo escogí comenzar caminando hacia el vértice _____.
3. Camina alrededor del polígono hasta el segundo vértice pasando el vértice del comienzo.	3. Yo me detuve en el vértice _____.
4. Traza la diagonal desde ese vértice hasta el vértice del comienzo.	4. Yo dibujé la diagonal _____.

La Figura 1.61 muestra cómo uno de los autores trabajó con estos pasos.

Ahora tenemos dos triángulos y un cuadrilátero, $BCDE$. Tu cuadrilátero puede que tenga un nombre diferente.

Resultados
1. Yo escogí el vértice <u>E</u> como mi vértice de comienzo
2. Yo escogí comenzar caminando hacia el vértice <u>F</u>
3. Yo me detuve en el vértice <u>B</u> .
4. Yo dibujé la diagonal <u>BE</u> .

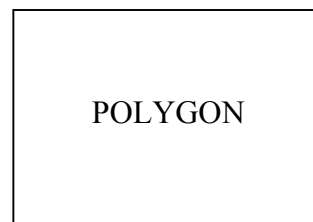


Figura 1.61

¿Qué piensas que deberíamos hacer ahora? ¿Cuántas opciones tenemos desde el punto de comienzo? Después que escogimos un punto de comienzo, ¿Cuántas opciones tenemos para ir en una dirección? ¿Cuántas opciones hay en total? ¿Hay realmente tantas maneras de dividir este cuadrilátero en triángulos? Explica.

La Figura 1.62 muestra una manera de dividir el cuadrilátero *BCDE*.

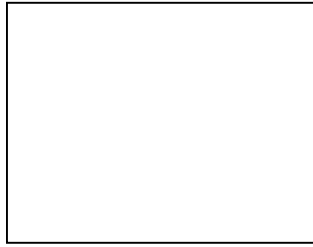


Figura 1.62

El proceso de dividir un polígono en triángulos que no están superpuestos es llamado **triangulación**. El algoritmo que hemos estado usando es un algoritmo de triangulación. Su propósito es dividir un polígono en triángulos. Cada vez que es aplicado, un triángulo es “rebanado” del polígono sobrante. Verás un algoritmo de triangulación levemente diferente en un capítulo más adelante.

Una característica importante de un algoritmo es alguna manera de decir cuándo has terminado. Para este algoritmo, has terminado cuando el polígono sobrante es en sí mismo un triángulo. Hemos terminado.

1. **¿Cuántas veces necesitamos aplicar este algoritmo a nuestro hexágono?**
2. **¿Cuántas veces necesitarías aplicar este algoritmo a un pentágono? ¿A un octágono? ¿A un decágono?**
3. **¿Cuántas veces necesitarías aplicar este algoritmo a un *n-gono*? Explica.**
4. **¿Qué pasaría si aplicas el algoritmo a un triángulo?**

Ahora puedes encontrar el área de cualquier polígono. Todo lo que tienes que hacer es triangular el polígono, encontrar el área de cada triángulo, y sumar.

1. Usa tu diagrama para encontrar el área de cada triángulo en tu triangulación del hexágono. Suma estas áreas para encontrar el área de un hexágono.
2. Compara tu respuesta con las de tus compañeros de clase. ¿Ves un patrón? ¿Es lo que esperabas? Si es así, explica por qué esperabas este patrón. Si no es así, explica cómo las cosas no son como las esperabas.

Conjunto de ejercicios: 1.7

Nota que en estos ejercicios, *construye* significa *usar un compás y una regla para dibujar*.

1. Construye un triángulo con las longitudes de lados 4, 5, y 6 “wobbits”. ¿Es éste un triángulo rectángulo? Si es así, ¿cuál es el ángulo recto?
2. (a) Construye un triángulo con las longitudes de lados 12, 5, y 13 cm. ¿Es éste un triángulo rectángulo? Si es así, ¿cuál es el ángulo recto?
 (b) Construye un triángulo con las longitudes de lados 8, 5, y 13 cm. ¿Pasó algo problemático? ¿Cómo puedes detectar un problema como éste en el futuro?
 (c) Construye un triángulo con las longitudes de lados 7, 5, y 13 cm. ¿Pasó algo problemático? ¿Cómo puedes detectar un problema como éste en el futuro?
3. Construye dos copias congruentes del triángulo en la Figura 1.63 de forma tal que compartan el mismo segmento como su lado más largo y juntos formen un paralelogramo.



Figura 1.63

4. Dos estaciones de radares están a 130 millas una de la otra. Ambas detectan un OVNI directamente arriba de una línea que los conecta. De acuerdo al radar, el OVNI está a 120 millas de una estación y a 50 millas de la otra.
 - (a) ¿Por qué estas últimas dos distancias no suman 130 millas?
 - (b) Haz un dibujo en una escala precisa de esta situación.
 - (c) ¿Alrededor de cuán alto está volando el OVNI?

5. En esta sección dividimos un hexágono en triángulos en etapas. En cada etapa, tuvimos un polígono nuevo para dividir. Por ejemplo, después de la primera etapa, tenemos el pentágono $FBCDE$ para trabajar con él. Eventualmente $FBCDE$ fue dividido en tres triángulos. Completa la tabla en la Figura 1.64. Si quieres haz bocetos para ayudarte a visualizar algunos casos. ¿Puedes ver un patrón para ser colocado en la última línea de la tabla? ¿Puedes justificarlo?

Nombre	Núm. de lados	Núm. de triángulos
cuadrilátero	4	
pentágono	5	3
hexágono	6	
octágono		
decágono		
n-gono	n	

Figura 1.64

6. Construye un triángulo equilátero con lados de 2 pulgadas de largo.
- Construye tres altitudes, una conectando cada vértice al lado opuesto. ¿Notas algo interesante?
 - Mide las longitudes de las altitudes. ¿Conseguiste tres respuestas diferentes?
 - Usa una altitud y su base para encontrar el área de un triángulo.
7. Construye un triángulo con lados de 8, 10, y 12 cm. de largo.
- Construye tres altitudes, una conectando cada vértice al lado opuesto. ¿Notas algo interesante?
 - Mide las longitudes de las altitudes. ¿Conseguiste tres respuestas diferentes?
 - Usa cada altitud y su base para encontrar el área. ¿Conseguiste tres respuestas diferentes?
8. Para probar algebraicamente que la fórmula de área para los triángulos trabaja aún si la altitud que escogiste está afuera del triángulo, considera la situación mostrada en la Figura 1.65. El ángulo C del ΔABC es mayor que el ángulo recto, y la altitud de B interseca la extensión del lado AC en D . La longitud de AC es b , la longitud de la extensión CD es e , y la longitud de la altitud es h .

- (a) En términos de estas variables, ¿cuán largo es AD ?
- (b) Expresa el área del ΔABC como la diferencia de las áreas de dos triángulos rectángulos, los cuales ambos, contienen el ángulo recto en D .
- (c) Expresa algebraicamente la ecuación del área del ejercicio (b), y luego trabaja con el álgebra para completar la prueba. Justifica cada paso que tomes. Cuando llegues a tu último paso, explica cómo sabes que has terminado.

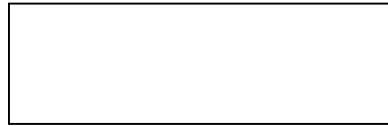


Figura 1.65

9. Una araña llamada Charlie está decorando los carriles del Ferrocarril Burlington Northern. Charlie deambula a lo largo de un carril y cada 30 pulgadas teje una tela de araña conectando la localidad actual a dos puntos fijos, A y B , en el otro carril. Hasta ahora en esta mañana, Charlie ha hecho esto en 10 localidades, como se muestra en la Figura 1.66. Los carriles están separados por 56 pulgadas.

- (a) ¿Tiene alguna simetría el patrón de Charlie?
- (b) En cada una de las 10 paradas de Charlie, él ha hecho un triángulo con A y B como dos de sus vértices. Los otros 10 vértices están rotulados 1-10. ¿Parece ser un triángulo rectángulo alguno de estos triángulos?
- (c) ¿Cuál es la distancia aproximada entre A y B ?
- (d) Encuentra el área de cada uno de los triángulos.
(Pista: Esta parte requiere más análisis que cálculos.)

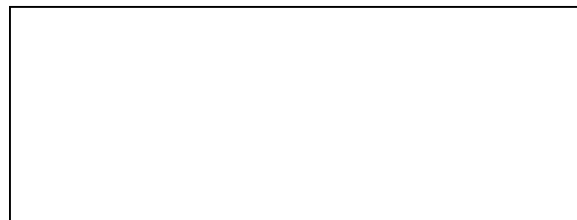
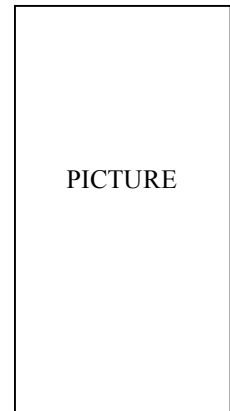


Figura 1.66