1.8 El Teorema de Pitágoras

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás

Explicar el Teorema de Pitágoras y su contrario

Explicar cómo el Teorema de Pitágoras es una afirmación de las áreas

Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar las longitudes y las áreas

Usar el contrario del Teorema de Pitágoras para construir ángulos rectos.

Como has visto, los triángulos rectángulos son elementos esenciales de construcción en la geometría. En esta sección estudiarás el hecho más importante acerca de los triángulos rectángulos. (De hecho, es probable que sean las seis afirmaciones más importantes en todas las matemáticas). Es llamado el *Teorema de Pitágoras*.

El teorema adquirió su nombre de una comunidad llamada los Pitagóricos, lo cuales vivieron en el sur de Italia durante el sexto siglo, A.C. Eran seguidores de Pitágoras, un maestro, erudito y líder religioso. Debido a que ellos creían que todo podía ser explicado por números, fueron pioneros en aplicar las ideas matemáticas al mundo real. Por ejemplo, ellos desarrollaron una teoría matemática de armonía musical, y ellos sabían que la Tierra era una esfera casi 2,000 años antes que Colón navegara desde España.

Realmente sabemos muy poco acerca de Pitágoras. Hemos oído muchas leyendas sobre él. Pero después de 2,500 años es difícil decir qué es un hecho y qué es un mito. Una de las leyendas acerca de Pitágoras dice que él descubrió el teorema llamado así por él, mientras contemplaba el patrón de las losetas del piso, como las mostradas en la Figura 1.67.

Este era un patrón familiar, pero Pitágoras lo vio de una manera nueva. Muchos descubrimientos son hechos de esta manera. Él notó una relación entre tres cuadros construidos en los lados de un triángulo rectángulo. Para mostrar cómo Pitágoras observó a este patrón del suelo, en la Figura 1.68 hemos ensombrecido los cuadros en los cuales él se concentró.

1. **Encuentra las áreas de estos tres cuadrados. Usa un cuadro de loseta como tu unidad de área. Cada triángulo pequeño es un cuarto de una unidad.**
2. **Pitágoras puede que haya notado *dos* relaciones especiales entre las áreas. ¿Cuáles son éstas?**

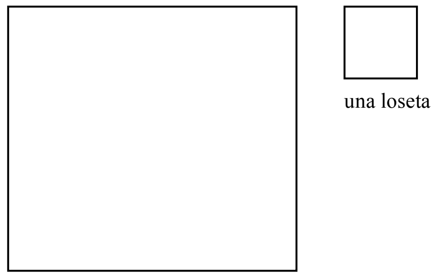


Figura 1.67

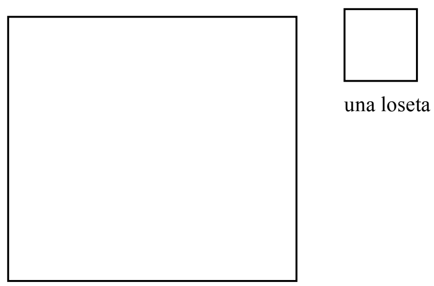


Figura 1.68

El triángulo en la Figura 1.68 es algo especial. Es un triángulo *rectángulo isósceles*. Esto significa que tiene dos lados de la misma longitud, que forma un ángulo recto entre ellos.

¿Piensas que las relaciones que Pitágoras observó ocurrirían aún si el triángulo rectángulo no es isósceles? ¿Si es isósceles, pero no un triángulo rectángulo? ¿Si no es isósceles, ni rectángulo? ¿Cómo puedes saberlo?

Usa cualquier herramienta que quieras (regla, compás, transportador) para dibujar y medir las siguientes figuras tan precisas como puedas.

1. **Dibuja un triángulo rectángulo que no es isósceles. Haz los lados de cualquier largo que quieras. Luego dibuja un cuadrado en cada lado de tu triángulo. Mide las longitudes de los lados cuidadosamente y calcula las áreas de los cuadrados. ¿Cuál de las dos relaciones de áreas en la Figura 1.68 todavía se mantienen? ¿Se mantienen las dos? Compara tus resultados con aquellos de tus compañeros de clases.**

2. **Repite el ejercicio 1 para un triángulo isósceles que no es un triángulo rectángulo.**

3. **Repite el ejercicio 1 para un triángulo que no es isósceles o rectángulo.**

4. **¿Qué piensas que dice el Teorema de Pitágoras?**

Esto es lo que Pitágoras observó:

El **Teorema de Pitágoras** (versión geométrica): El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados en los catetos.

…………………………………………………………………

Observa que decimos "el cuadrado(s) *en*" en vez de "el cuadrado(s) *de*." Pitágoras hubiera dicho "en" porque él estaba pensando en los cuadrados actuales y sus áreas. Para Pitágoras, un cuadrado era una figura geométrica, no un número. Y cuando él dijo "igual," él quiso decir que los dos pequeños cuadrados podrían actualmente ser cortados y puestos juntos para formar el cuadrado grande. Él no pensó o escribió en el lenguaje de álgebra. De hecho, ¡la notación algebraica no se inventaría por otros 2,000 años!

En estos días frecuentemente pensamos algebraicamente sobre el Teorema de Pitágoras. Esto lo hace más útil para muchas cosas que Pitágoras nunca soñó. Usando el hecho de que el cuadrado con la longitud de lado s tiene un área s^2, podemos replantear el teorema como:

El **Teorema de Pitágoras** (versión algebraica):
Si el $\Delta\, ABC$ es un triángulo rectángulo con el largo de la hipotenusa c y el largo de los catetos a y b, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

…………………………………………………………………

En la versión algebraica, el $\angle C$ es el ángulo recto del Δ ABC. Es el ángulo opuesto a la hipotenusa.

1. **¿Qué pasaría si cambias el triángulo haciendo el $\angle C$ más grande que un ángulo recto? ¿Cómo cambiaría la afirmación algebraica? ¿Ayudaría si visualizaras la forma geométrica de un teorema?**

2. **¿Qué pasaría si haces el $\angle C$ más pequeño que un ángulo recto? ¿Cómo cambiaría la afirmación algebraica?**

El Teorema de Pitágoras es una afirmación acerca de *todos* los triángulos rectángulos. Dice que *cada uno* de los triángulos rectángulos tiene esta relación especial entre los cuadrados de sus lados. ¿Qué crees sobre su contrario? Más o menos, su contrario dice que cualquier triángulo con esta relación especial entre los cuadrados de sus lados debe ser un triángulo rectángulo.

El contrario del Teorema de Pitágoras:

Si el $\Delta\, ABC$ tiene lados de longitudes a, b, y c como

$$a^2 + b^2 = c^2$$

entonces el ángulo opuesto al largo del lado c debe ser un ángulo rectángulo.

Como has visto, una afirmación cierta puede ser un contrario falso. Sin embargo, en este caso, el contrario es cierto también. Además, es una herramienta conveniente para identificar triángulos rectángulos.

Usa el contrario del Teorema de Pitágoras para determinar cuál de los triángulos con las siguientes longitudes de los lados son triángulos rectángulos. Para los que no son, di si el ángulo opuesto al lado más largo debe ser mayor que o menor que un ángulo recto. Explica.

Exercises

El contrario del Teorema de Pitágoras fue usado por los agrimensores en el Antiguo Egipto. Ellos medían usando cuerdas con nudos en intervalos regulares. Ellos sabían que si marcaban un triángulo 3-4-5, éste contendría un ángulo recto. Los chinos en la antigüedad sabían que el teorema por sí mismo es cierto para los triángulos rectángulos isósceles. Las contribuciones de los griegos fue el probar qué se mantenía para cualquier triángulo rectángulo. El Teorema de Pitágoras es una afirmación acerca de las áreas. Pero muchas aplicaciones se preocupan más con las longitudes de los lados que las áreas de los cuadrados en ellos, como en el siguiente ejemplo.

Joel, un operador de radio aficionado, quiere colocar una antena de poste de 42 pies. Si la antena se inclina de un lado a otro, podría caerse con un viento fuerte. Por esa razón, él quiere construirlo en ángulos rectos al suelo. Él planifica usar cables de apoyo para mantener la antena derecha. La antena, el suelo y cada cable de apoyo forman un triángulo rectángulo. Consideramos un solo alambre a la vez; todos ellos pueden ser manejados en la misma manera. Un modelo matemático de esta situación es un triángulo rectángulo, el $\Delta\ ABC$ en la Figura 1.69.

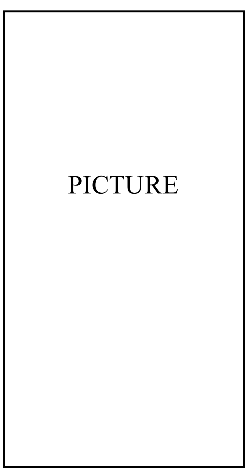
Cada cable de apoyo será atado a la antena de 40 pies sobre el suelo, cerca de la parte superior. Para saber cuánto cable hay que comprar, Joel necesita saber la longitud de cada apoyo. Él decide amarrar un cable al suelo, 30 pies de la base de la antena. Luego él usa la fórmula del Teorema de Pitágoras:

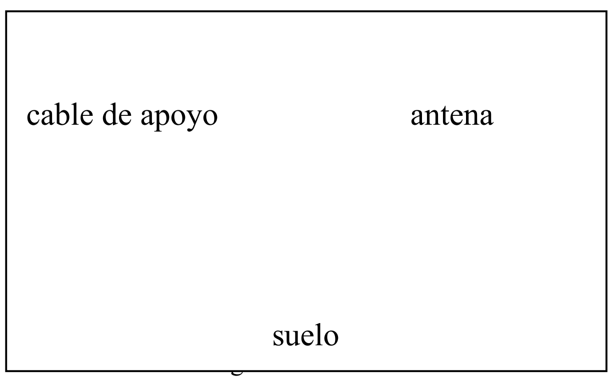
$$a^2 + b^2 = c^2$$

En ese caso, a = 40 pies, y b = 30 pies, así que

$$40^2 + 30^2 = c^2$$

Esto le dice a él que c^2 = 2,500.





1. **¿Cuánta longitud tiene este cable de apoyo? ¿Cuál es su unidad de medida?**
2. **Joel no tiene suficiente espacio para colocar uno de los cables de apoyo 30 pies de la base. Él tiene que amarrar sus 22 pies de la base. ¿Cuán largo es este cable de apoyo? Redondea tu respuesta a un lugar decimal.**

Si conoces la longitud de *cualesquiera* dos lados de un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras te dice la longitud del tercer lado. En el ejemplo previo, éste fue usado para encontrar la longitud de la hipotenusa de las longitudes de los otros dos lados. En este próximo ejemplo, la hipotenusa y otro de los lados son conocidos.

Figura 1.70

Charlie Brown finalmente tiene su cometa volandolo en el estacionamiento de la escuela. Él tiene 100 pies de cuerda extendida hasta el cometa, y él quiere saber cuán alto está el cometa del suelo. Lucy mide la distancia desde donde Charlie está parado hasta un punto, *L*, en el cual ella está directamente bajo el cometa. La distancia es 75 pies.

1. **¿Es un buen modelo matemático para esta situación la Figura 1.70? ¿Qué representan las letras? ¿Qué conjeturas simplificadas estamos haciendo cuando usamos este modelo?**
2. **De acuerdo al modelo en la Figura 1.70, ¿cuán alto está el cometa de Charlie? Redondea tu respuesta al pie más cercano.**
3. **¿Cómo podrías modificar tu respuesta al ejercicio 2 para poder explicar las conjeturas de este modelo?**

Algunas veces, pero no frecuentemente, las longitudes de los *tres lados* en una aplicación del Teorema de Pitágoras son números enteros. Los dos ejemplos más comunes, los cuales ya has visto, son

3, 4, 5 y 5, 12, 13

Hay muchos otros, pero no siempre fácil de encontrar. La curiosidad de dichos números ha llevado a las personas a buscar más ejemplos e investigar que propiedades especiales pueden tener, como los números triples. Ellos hasta le dan a estos números un nombre especial: Tres números enteros positivos a, b, y c como es $a^2 + b^2 = c^2$ son llamados un **triple Pitagórico**. Si los lados de un triángulo forman un triple Pitagórico, entonces sabemos (del contrario del Teorema de Pitágoras) que el triángulo debe de tener un ángulo recto opuesto a su lado más largo. Este es un atajo corto en algunas situaciones.

1. **¿Cuál de los siguientes son triples Pitagóricos? Justifica cada respuesta.**

NUMBERS

2. **Revisa que todos los siguientes sean triples Pitagóricos.**

NUMBERS

En tus propias palabras, ¿cuál es el patrón?

3. **Nosotros podemos enunciar el patrón del ejercicio 2 algebraicamente, como este: si *n* es un número natural, entonces 3*n*, 4*n*, 5*n* es un triple Pitagórico. Pruébalo. (*Pista*: Usa la Ley Distributiva y un poco de álgebra.)**

Terminamos esta sección con un uso más importante del Teorema de Pitágoras. En un sistema de coordenadas rectangular, la llave para encontrar la distancia entre dos puntos es usándose las coordenadas. La Figura 1.71 muestra un ejemplo típico de éste. El segmento de línea entre los puntos (2, 1) y (6, 4) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con sus catetos paralelos a los ejes de coordenadas. Su longitud es la *distancia*, *d*, entre los dos puntos. El vértice del ángulo recto es (6, 1).

y-axis = eje de la y
x-axis = eje de la x

La distancia entre (2, 1) y (6, 4)

Figura 1.71

Observa que el vértice en el ángulo recto está en la misma línea horizontal como (2, 1), por eso tiene la misma coordenada de y, 1. Está en la misma línea vertical como (6, 4), por eso tiene la misma coordenada en x, 6.

Esto significa que la longitud de uno de los catetos del triángulo es 6 – 2, la diferencia en las coordenadas en la *x* de los dos puntos originales. La longitud del otro cateto es 4 – 1, la diferencia en las coordenadas en la *y* de los dos puntos originales. Ahora aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa.

NUMBERS

Usa el Teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre los siguientes pares de puntos en el plano de coordenadas. Dibuja un boceto en cada caso y da las coordenadas del vértice del ángulo recto.

NUMBERS

Verás muchos usos para el Teorema de Pitágoras según aprendes más acerca de matemáticas y ciencias. Esto es fundamental para cualquier sociedad tecnológica o industrial. De hecho, hace muchos años había un plan para usarlo para tratar de comunicarse con vida en otros planetas, dibujando una copia *muy* grande de la figura con un triángulo y los tres cuadrados que tomaban muchas millas de ancho en el desierto. La teoría era que cualquier civilización avanzada, sin importar cómo se comunicaran, tendrían que conocer la idea del Teorema de Pitágoras. Ellos reconocerían la figura y sabrían que también hay vida inteligente en este planeta.

Conjunto de ejercicios: 1.8

1. De acuerdo al Teorema de Pitágoras, si dibujas cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados en los catetos será igual al área del cuadrado en la hipotenusa. ¿Funciona también en otras formas que no sean cuadrados? Este problema te pide que explores una parte de esa pregunta. Tu maestro te dará una copia de un triángulo rectángulo con cuadrados dibujados en sus lados para ayudarte a contestar las siguientes preguntas. Usa el centímetro como tu unidad de longitud.

(a) Mide los lados del Δ *ABC*. Luego mides los lados de los cuadrados en cada lado y calcula sus áreas. En este caso, ¿es cierto que $a^2 + b^2 = c^2$?

(b) Extiende cada cuadro por 2 cm. a lo largo de las líneas quebradas para formar un rectángulo. Las dimensiones de tu rectángulo en el lado *BC* debería ser a y $a + 2$.

(i) En términos de b y c, ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos en los otros dos lados?

(ii) Calcula las áreas de estos tres rectángulos. ¿Es cierto que la suma de las áreas de los rectángulos en los catetos iguala el área del rectángulo en la hipotenusa?

(c) Extiende más cada uno de estos rectángulos a lo largo de las líneas quebradas, para que el lado largo de cada uno sea dos veces tan largo como al lado del cuadro original.

(i) En términos de a, b y c, ¿Cuáles son las dimensiones de estos nuevos rectángulos?

(ii) Calcula las áreas de estos tres rectángulos. ¿Es cierto que la suma de las áreas de los rectángulos en los catetos iguala el área del rectángulo en la hipotenusa?

(d) Trata de generalizar estos ejemplos para formar una regla que describa cuando el área sumada de la propiedad mantenga los rectángulos en los lados de un triángulo rectángulo. Si te estás sintiendo verdaderamente aventurero, trata de probar tu regla algebraicamente, basándote en tus expresiones para las dimensiones de los rectángulos en las partes (b) y (c). (*Pista*: Tiene que ver con la Ley Distributiva.)

2. Se han puesto dos lotes vacíos a la venta, y la Sra. Bocciarelli está pensando en comprarlos. El agente de bienes raíces dijo que ambos lotes son rectangulares. Él dice que el lote más pequeño es 50 pies de ancho por 120 pies de largo, y que el lote más grande es 320 pies de ancho por 400 pies de largo. La Sra. Bocciarelli fue y revisó las medidas y resultaron ser ciertas las medidas del agente. También midió la distancia de una esquina de cada lote hasta la esquina opuesta. Ella obtuvo 130 pies por el lote pequeño y 540 pies por el lote grande. Entonces ella supo que había algo incorrecto. ¿Qué es? ¿Cómo parece que afectaría el valor de la propiedad?

3. Un triángulo rectángulo tiene catetos con las longitudes 8 mm. y 15 mm. de largo. ¿Cuán larga es la hipotenusa? Encuentra el área y el perímetro.

4. Un triángulo rectángulo tiene un lado de 27 yardas de largo y una hipotenusa de 40 yardas de largo. ¿Cuán largo es el otro lado? Redondea tu respuesta a un lugar decimal. Encuentra el área y el perímetro.

5. En las planicies occidentales hay una parcela rectangular de pradera colindante por los cuatro lados por carreteras de tierra, casi perfectamente rectas. Dos caminos corren de norte a sur; dos caminos corren de este a oeste. La parcela de tierra mide 10 millas por 12 millas. Un automóvil y un jinete comienzan a correr por la esquina sudeste a la misma vez, ambos se encaminan a la esquina noroeste. El automóvil debe correr en los caminos de tierra y puede promediar alrededor de 35 MPH. El caballo puede cortar a través de la pradera y puede promediar alrededor de 25 MPH. ¿Quién llegará a la esquina noroeste primero y por cuánto tiempo?

PICTURE

6. La Sra., Bocciarelli está construyendo una casa de dos pisos. El segundo piso está 8 pies sobre el primer piso. Ella planifica una escalera del primer piso al segundo que cubriría 11 pies horizontalmente.

   (a) ¿Cuán largo tiene que ser el pasamano?

   (b) El almacén de madera trabaja con pulgadas. ¿Cuánto material para pasamano debe ordenar la Sra. Bocciarelli en el almacén de madera? Haz cálculos cuidadosamente; el material de pasamano es costoso.

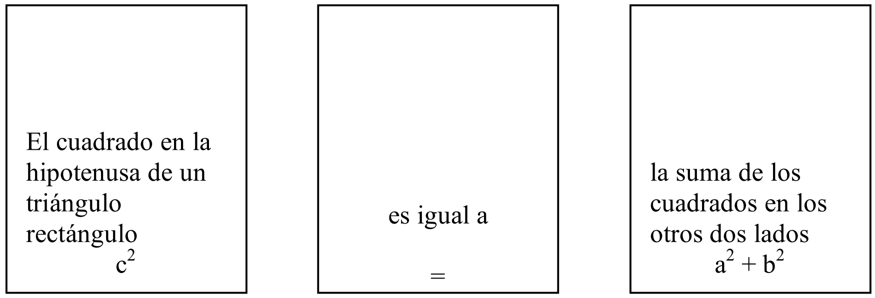
7. ¿Puede haber un triple Pitagórico con 1 en éste? Si es así, encuentra uno. Si no es así, explica por qué no.

8. Prueba que, si n es un número natural y a, b, c es un triple Pitagórico, entonces na, nb, nc es también un triple Pitagórico. (*Pista*: Usa la Ley Distributiva.)

9. Un triángulo en el plano de coordenadas tiene vértices (1, 2), (7, 10) y (26.2, -4.4). ¿Es éste un triángulo rectángulo? ¿Por qué sí o por qué no? Encuentra el perímetro y su área. (*Pista*: Comienza encontrando las longitudes de sus lados.)

10. A través de los siglos, el Teorema de Pitágoras se ha probado en cientos de maneras diferentes. Aquí hay una prueba de alrededor de 900 A.C. por un erudito árabe. La idea principal de la prueba, mostrada por la Figura 1.72, es ésta:

> Comenzando con un cuadrado en el lado de la hipotenusa, corta dos copias del triángulo rectángulo original. Luego pégalos en el pentágono impar restante de manera que ellos claramente forman la figura de los otros dos cuadrados lado a lado.



El Teorema de Pitágoras

Figura 1.72

(a) Tu maestro te dará una hoja de papel con dos figuras cuadradas en ésta. La de arriba es para usarse en esta parte. Ésta muestra dos copias congruentes de un triángulo rectángulo dentro de un cuadrado con la longitud de los lados igual a la hipotenusa del triángulo. Corta los dos triángulos. Luego reordena las tres piezas para formar la suma de los cuadrados en los otros dos lados del triángulo, como se muestra en la Figura 1.72.

(b) ¿Es la demostración de cortar y pegar de la parte (a) una prueba convincente del Teorema de Pitágoras? Hay un peligro en creer en dichas cosas sin revisar los detalles. Por ejemplo, observa el cuadrado inferior en la hoja de papel. Es un cuadrado 8 por 8, medido en medias pulgadas que están claramente marcadas a todo su alrededor. Corta el cuadrado. Luego córtalo cuidadosamente a lo largo de las líneas entrecortadas para hacer cuatro piezas. Reordena las cuatro piezas en un rectángulo 5 por 13. Entonces explica qué hiciste incorrectamente. (*Pista*: ¿Cuál es el área del cuadrado? ¿Del rectángulo?