

1.9 Varía con el cuadrado

La Sra. Chi está preparando una fiesta de cumpleaños para Fan. Ella sabe que a él y a sus amigos les gusta muchísimo el Famoso Helado de Chocolate Hecho en Casa de Cliff. Es muy caro y viene solamente en pintas, pero los cumpleaños son ocasiones especiales. La Sra. Chi piensa que una pinta dará de comer a dos jóvenes hambrientos.

1. **¿Cuántos jóvenes hambrientos pueden comer con 10 pintas de helado? ¿Con 12 pintas? ¿Con 15 pintas?**
2. **Escribe una ecuación para el número, T , de jóvenes hambrientos que pueden ser servidos con p pintas del Famoso Helado de Chocolate Hecho en Casa de Cliff.**
3. **Diagrama esta ecuación en tu calculadora. ¿Qué forma consigues? Describe sus localidades en el plano de coordenadas.**

Acabas de ver un ejemplo típico de variación directa, una relación particularmente buena entre dos variables. Según una variable aumenta, así lo hace la otra, y estas podemos decir que aumentan “en pasos”. De manera similar, según una variable disminuye, así lo hace la otra. Por ejemplo, en el ejemplo del helado si duplicas el número de las personas, duplicas el número de pintas que necesitas; si triplicas el número de personas, triplicas el número de pintas que necesitas y así sucesivamente.

Frasas a conocer: Una variable y **varía directamente** según una variable x , si hay una constante positiva k , por lo que $y = kx$. Esta situación también es descrita diciendo que y es **directamente proporcional** a x . El número k es llamado la **constante de proporcionalidad**.

Algunas veces la constante de proporcionalidad es llamada el *factor de escala*, particularmente cuando estamos hablando acerca de cambiar el tamaño de una fotografía o una figura geométrica. Esta frase sencilla aparecerá frecuentemente en el próximo capítulo, donde hablamos de formas geoméricamente escamantes.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Reconocer situaciones en las cuales una variable varía directamente o de manera inversa a otra o al cuadrado de otra

Expresar directamente y de manera inversa variaciones algebraicamente

Describirás situaciones del mundo real usando variación directa o inversa.

1. ¿Qué forma tiene la gráfica de una ecuación de variación directa? Describe su posición en el plano de coordenadas tan específicamente como puedas.
2. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en el ejemplo del helado?
3. ¿Varía directamente el perímetro de un cuadrado según la longitud de su lado? Si es así, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? Si no es así, ¿por qué no?
4. ¿Varía directamente la longitud de los lados de un cuadrado según su perímetro? Si es así, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? Si no es así, ¿por qué no?
5. ¿Varía directamente el área de un cuadrado a la longitud de su lado? Si es así, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? Si no es así, ¿por qué no?
6. Para un número dado de n lados, ¿es el perímetro de un n -gono regular directamente proporcional a la longitud de su lado? Si es así, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? Si no es así, ¿por qué no?

¿Están los grados Fahrenheit directamente proporcionales a los grados centígrados (Celsius)? ¿Por qué sí o por qué no?

Una relación cercana de una variación directa es importante cuando se trabaja con variables, particularmente en ambientes geométricos que envuelven área. Aquí hay un ejemplo sencillo:

Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles tienen la misma longitud.

1. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles con longitud de catetos de 4 cm.? ¿5 cm.? ¿7 cm.? ¿10 cm.? ¿20 cm.? ¿100 cm.? Haz una tabla pequeña con estos datos.
2. Escribe una fórmula para el área, A , de un triángulo rectángulo isósceles con longitud x de catetos.
3. Diagrama tu fórmula en tu calculadora. ¿Es una línea recta? ¿Dónde toca los ejes?
4. Según x se hace más grande, ¿se convierte A en más grande? ¿Varía directamente A con x ? Si es así, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? Si no es así, ¿por qué no?

En este último ejemplo, A (el cual es medido en unidades cuadradas) es igual a la constante multiplicada por el *cuadrado* de x (el cual es medido en

unidades de longitud). Este tipo de situación aparece con frecuencia lo suficiente para tener su propio nombre.

Frases a conocer: Una variable y **varía directamente como el cuadrado de** una variable x si hay una constante positiva k , como es $y = kx^2$. Esta frase es algunas veces abreviada como y **varía directamente a x^2** . El número k es otra vez llamado la **constante de proporcionalidad**.

.....

1. **Escribe una fórmula expresando la longitud d de la diagonal de un cuadrado en términos de la longitud de su lado s .**
2. **¿Varía directamente la diagonal a la longitud de lado, o varía directamente al cuadrado de la longitud de lado? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Explica.**

En algunas situaciones, según una variable aumenta, otra *disminuye*. Esto aparece frecuentemente en una situación donde las variables representan metas conflictivas. Según la temperatura disminuye, el costo de electricidad aumenta; según el precio de un producto aumenta, la demanda por éste (generalmente) disminuye. En una lotería del estado, es muy atractivo el tener muchas posibilidades de premios y premios tan grandes como sea posible. Sin embargo, ¡es difícil aumentar el número de premios sin reducir su valor!

Frases a conocer: Una variable y **varía inversamente como** una variable x si hay una constante positiva k , como es $y = \frac{k}{x}$. Esta situación es también descrita diciendo que y es **inversamente proporcional a x** . Al igual que antes, el número k es llamado la **constante de proporcionalidad**.

.....

Eres el director de la lotería del estado. En una semana típica, la venta total de boletos fue \$6 millones. De ésta, \$3 millones va al presupuesto del estado y \$1 millón va hacia los gastos para correr la lotería, dejándole al estado \$2 millones para los premios de cada semana. Tú estás considerando varias maneras de dividir el premio. Tu meta es vender tantos boletos como sea posible.

1. **Un plan es dar cinco premios de igual valor. Si tu**

sigues este plan, ¿cuánto será el valor de cada premio?

2. También estás considerando otros siete planes, cada uno con premios de igual valor. ¿Cuán grande puede ser cada premio si das premios de 1, 2, 10, 50, 100, 1000, 10,000? Haz una tabla con estos datos.
3. ¿Cuál de estos ocho planes podrías encontrar más llamativo si estuvieras pensando en comprar un boleto?
4. Define algunas variables y escribe una ecuación describiendo estas situaciones.
5. Diagrama la ecuación en papel cuadriculado usando la misma escala en ambos ejes. Trata cambiando ambas variables entre 0 y 10,000. Puede que tengas que calcular más puntos de datos.
6. ¿Puedes encontrar alguna simetría en la gráfica?
7. Haz la misma gráfica en tu calculadora gráfica. ¿Es esta gráfica mejor o peor que la que hiciste a mano para estudiar esta función? Explica.

Algunas veces según una variable aumenta, su cuadrado determina la proporción en la cual otra disminuye. Esto algunas veces viene en una situación donde algo –como una luz, sonido o atracción magnética– se extiende desde su fuente.

Frases a conocer: Una variable y **varía inversamente según el cuadrado** de una variable x si hay una constante positiva k , como es $y = \frac{k}{x^2}$. Esta frase es algunas veces abreviada a y **varía inversamente como x^2** . El número k es llamado la **constante de proporcionalidad**.

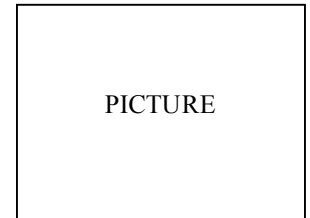
.....

La cantidad de luz desde el punto de una fuente varía inversamente según el cuadrado de la distancia alejada de la fuente de luz. ¿Has visto alguna vez a alguien tratando de tomar fotografías con flash en una presentación escolar o graduación? El flash en una cámara sencilla provee la cantidad correcta de luz alrededor de 8 pies desde la cámara. Para un flash en particular, la ley es

$$L = \frac{256,000}{d^2}$$

donde L es la cantidad de luz (en unidades de luz) y d es la distancia (en pies) desde el flash hasta el sujeto.

1. **¿Cuánta luz está disponible a 8 pies? Asume que ésta es solamente la cantidad correcta de luz para tomar fotografías con esta cámara.**
2. **¿Cuánta luz está disponible a 6 pies, la distancia mínima recomendada para este flash? ¿Qué porcentaje es éste de la cantidad disponible a 8 pies? ¿Cómo piensas que luzca una fotografía tomada a 6 pies?**
3. **¿Cuánta luz está disponible a 10 pies, la distancia mínima recomendada para este flash? ¿Qué porcentaje es éste de la cantidad disponible a 8 pies? ¿Cómo piensas que luzca una fotografía tomada a 10 pies?**
4. **Supón que llevas esta cámara a la graduación de tu amiga y desde 50 pies de distancia tomas una fotografía de ella recibiendo su diploma. ¿Cuánta luz está disponible a 50 pies? ¿Qué porcentaje es éste de la cantidad disponible a 8 pies? ¿Cómo piensas que luzca una fotografía tomada a 50 pies? ¿Cuál es el mensaje aquí?**



Conjunto de ejercicios: 1.9

1. La Figura 1.73 muestra un muelle en espiral. Si halas los extremos del muelle en espiral, la cantidad de muelle estirado varía directamente según la fuerza con la que tú halas. Los muelles como este son usados para hacer escalas sencillas. Algunas escalas para pesar pescado o productos son hechas como ésta. Si giras el muelle verticalmente y lo cuelgas de un extremo, la cantidad que estira es directamente proporcional al peso. Esto nos permite leer el peso en una escala de longitud.



Figura 1.73

- (a) Un muelle en particular es estirado 1.28 pulgadas cuando le colgamos un peso de 32 libras. Encuentra la constante de proporcionalidad.
- (b) ¿Cuán lejos podría estirarse el muelle si cuelgas un peso de 50 libras en éste?
- (c) Queremos hacer una escala con este muelle con marcas cada 5 libras. ¿Cuán lejos una de otra deben estar las marcas, en pulgadas?
- (d) La escala es 4 pulgadas de longitud. ¿Cuál es la cantidad mayor de peso que medirá la escala?

2. La cantidad de combustible necesario para mantener una casa caliente en invierno es directamente proporcional a la diferencia en la temperatura del interior y del exterior. Deberíamos medir el uso de combustible en términos de dólares del costo del combustible. Asume que el precio del combustible se mantiene igual todo el invierno. Este cuesta \$4 por día para calentar una casa en particular, cuando la temperatura del interior es 68°F y la temperatura (promedio) del exterior es congelante (32°F).
- (a) Escribe una ecuación para la relación entre el costo de combustible por día, c en dólares y la diferencia entre las temperaturas del interior y del exterior, d en grados Fahrenheit. Tendrás que encontrar la constante de proporcionalidad de los datos dados.
- (b) ¿Qué costará por un día cuando el promedio de temperatura del exterior es 0°? ¿50°? ¿-10°? Redondea tus respuestas al centavo más cercano.
- (c) Copia la tabla en la Figura 1.74. En la segunda columna, completa los costos que calculaste en la parte (b). Luego calcula y completa los costos para las temperaturas del interior de 62° y 72°.
- (d) Si estuvieras viviendo en esta casa y pagando por el combustible, ¿qué temperatura mantendrías adentro de la casa? ¿Por qué?

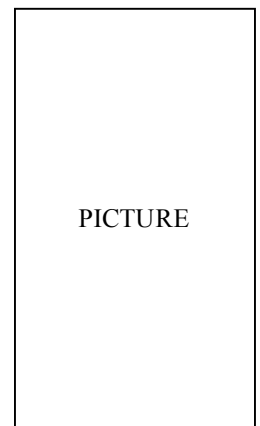
Temp. del exterior	Temperatura del interior		
	68°	62°	72°
50°			
32°	\$4.00		
0°			
-10°			

Costo de calefacción diaria

Figura 1.74

3. (a) Explica las siguientes dos afirmaciones:
- (i) Decir qué y varía directamente como x es lo mismo a decir que $\frac{y}{x}$ es un número fijo.
- (ii) Decir qué y varía inversamente como x es lo mismo a decir que xy es un número fijo.
- (b) Escribe las dos afirmaciones análogas para las variaciones *cuadradas* directa e inversa.

4. Si ignoras la resistencia del aire, la distancia que viaja un objeto en caída libre varía directamente según el cuadrado del tiempo en que está cayendo. Esta ley básica de física fue descubierta por Galileo en el siglo 17. Particularmente, una roca cayendo desde el tope de una torre de 19.5 metros golpeará el suelo en exactamente 2 segundos.
- (a) Escribe una ecuación para esta relación entre la distancia de caída en metros, y el tiempo de la caída, en segundos. Asegúrate de definir las variables que uses. Encuentra la constante de proporcionalidad de los datos dados.
- (b) La gota vertical más alta e irrompible de las Cataratas del Niágara es de 51 metros. ¿Cuánto tiempo le toma a una gota de agua caer desde el borde de las cataratas al charco en su base? Redondea tu respuesta a la décima de segundo más cercana.
- (c) Las Cataratas de Victoria, en el Río Zambezi en el sur central de África, fueron descubiertas por un europeo, David Livingstone, en 1855. Para estimar la altura de las caídas, Livingstone podría haber estimado cuánto tiempo le tomó a un tronco de árbol caer por las cataratas hacia el borde al río abajo. Al tronco le podría haber tomado $4\frac{3}{4}$ segundos. ¿Cuán alta es la caída de agua? Redondea tu respuesta al metro más cercano.
- (d) Escribe una ecuación para la relación entre la distancia caída, *en pies*, y el tiempo de la caída de la catarata, *en segundos*. Asegúrate de definir las variables que usaste. Redondea tu valor para la constante de proporcionalidad al entero más cercano. Un metro es igual a 39.37 pulgadas.
- (e) Un mecánico descuidado deja una llave inglesa pequeña en la cavidad de la rueda de un aeroplano de carga. Según el aeroplano está volando a 30,000 pies, la llave inglesa cae del aeroplano. ¿Cuán lejos (en pies) cae la llave inglesa en 5 segundos? ¿En 10 segundos? ¿Cuánto tiempo le toma llegar al suelo? Redondea tu respuesta a la décima de segundo más cercana.
5. Un caso especial de la Ley de Gravedad de Newton dice que el peso de un objeto en la Tierra varía inversamente según el cuadrado de su distancia desde el centro de la Tierra. Para este problema, asume que la distancia desde el nivel del mar hasta el centro de la Tierra es 4000 millas. Actualmente varía de lugar a lugar en el globo terráqueo, pero este estimado trabajará lo suficientemente bien para nosotros.



- (a) El Monte Everest, localizado en las Himalayas entre Nepal y Tibet, es la montaña más alta del mundo. Su tope está a 29,028 pies sobre el nivel del mar. Kumar pesa 200 libras en el nivel del mar. Si él es transportado hasta el tope del Monte Everest para que no tenga que quemar ningún peso llegando ahí, ¿cuánto menos pesará Kumar en el tope de esta montaña? Redondea tu respuesta a la décima de libra más cercana.
- (b) Un cohete en Cabo Cañaveral está comenzando a levantar un satélite lunar de 900 libras hacia el espacio. Mientras más lejos sube, menos pesa el satélite. ¿Cuánto pesará el satélite 50 millas arriba? ¿100 millas arriba? ¿200 millas arriba? Redondea tus respuestas a la libra más cercana.
- (c) ¿Cuán alto sobre la Tierra pesará 100 libras el satélite de la parte (b)?