Semejanza y razón: Creciendo y encogiéndose cuidadosamente

Capítulo 2

Logros del aprendizaje
Después de estudiar esta sección, podrás:

Explicar el significado geométrico de *semejanza* y dar ejemplos de figuras semejantes en un plano y espacio

Relacionar la similitud a los escalamientos en mapas, modelos, planos y cosas parecidas

Usar razones y proporciones para cotejar si las figuras son semejantes o no.

2.1 La misma figura

"Un lado te hará crecer más alta, el otro lado te hará crecer más baja."

"¿Un lado de *qué?* ¿El otro lado de *qué?*, pensó Alicia para sí misma.

"De la seta," dijo la oruga, justo como si lo preguntara en voz alta; y en otro momento fuera de vista.

Alicia se mantuvo mirando pensativa a la seta por un minuto, tratando de ver cuáles eran los dos lados de la misma; ya que era perfectamente redonda, ella encontró que era una pregunta muy difícil. Sin embargo, por último estrechó sus brazos lo más que pudo en forma redonda, y rompió un poco de las esquinas con cada mano.

"Y ahora, ¿cuál es cuál?" se dijo a sí misma mientras mordisqueaba un poco de la seta que tenía en su mano derecha para tratar su efecto: inmediatamente sintió un soplo violento debajo de su barbilla; ¡he chocado los pies con lac barbilla!

Alicia estaba asustada por este cambio repentino, pero sintió que no había tiempo que perder, ya que se estaba encogiendo rápidamente; así que se puso a trabajar comiendo otro poquito. Su barbilla estaba tan presionada con su pie, que apenas había lugar para abrir su boca; pero finalmente lo hizo, y logró tragarse un bocado del pedazo que tenía en la mano izquierda.

-Lewis Carroll, Alicia en el país de las maravillas

Esta sección es sobre crecimiento y encogimiento. Trata, más exactamente, sobre las semejanzas. El diccionario define el significado geométrico de *semejanza* como "teniendo la misma forma, pero no [necesariamente] el mismo tamaño o posición." Esto no es una mala descripción de la idea, *provisto de que* sepas lo que significa "la misma forma". ¿Lo sabes?

¿Qué crees que significa el decir que dos cosas "tienen la misma forma"? Prueba tu opinión con estos ejemplos:

1. **¿Tienen todos los triángulos la misma forma? Si contestas que sí, explica ¿por qué? Si contestas que no, dibuja dos triángulos con diferentes formas. También dibuja dos triángulos con la misma forma pero diferentes tamaños.**
2. **¿Tienen todos los rectángulos la misma forma? Si contestas que sí, explica por qué. Si contestas que no, dibuja dos rectángulos con formas diferentes. También dibuja dos rectángulos con la misma forma pero diferentes tamaños.**
3. **¿Tienen todos los cuadrados la misma forma? Si contestas que sí, explica ¿por qué? Si contestas que no, dibuja dos cuadrados con diferentes formas. También dibuja dos cuadrados con la misma forma pero diferentes tamaños.**
4. **¿Son las llantas de los automóviles iguales? Defiende tu respuesta.**

PICTURE

5. **¿Tienen todas las cajas de hojuelas de maíz de Kellogg’s la misma forma? Ve a un supermercado y observa las cajas de cereal de 12 oz., 18 oz., y 24 oz. de hojuelas de maíz. Mídelas, si quieres. Luego explica si tienen o no el mismo tamaño.**

En cierto sentido, estas preguntas son injustas. La idea de la “misma forma” no ha sido cuidadosamente definida, así que no hay una manera confiable de justificar tus respuestas. Pero ese fue el propósito al preguntar. Queremos que veas la necesidad de definir *figuras semejantes* cuidadosamente.

Fíjate en la descripción que hizo Carroll de Alicia mordisqueando la seta mágica. ¿Cómo tu imaginación visualiza a Alicia encogiéndose? ¿Qué parte de la Figura 2.1 –(a) ó (b)– se parece más a lo que “ves” en tu mente? ¿La ves aplastada como en la (a), casi toda cabeza y pies? ¿Crees tú que eso fue lo que Carroll imaginó cuando él escribió

> “Su barbilla estaba tan presionada a su pie, que apenas había lugar para abrir su boca”?

Según estas palabras, eso parece. Pero esa sería una Alicia extrañamente distorsionada, a duras penas lista para su próxima aventura, en la cual es una niña común –¡excepto que mide 9 pulgadas de alto! Aparte de su comentario de la barbilla y el pie, Carroll probablemente la imaginó algo así como en la Figura 2.1 (b). Él probablemente pensó en Alicia como creciendo y encogiéndose “proporcionalmente,” para que siempre se mantuviera de la misma forma. En este caso, su barbilla estaría tan lejos de su pie, relativamente hablando, como cuando era grande. ¡Eso es, si la distancia de su barbilla al pie fuera dos veces de la longitud de su brazo cuando era grande, entonces la distancia debería de seguir siendo dos veces la longitud de su brazo cuando era pequeña!

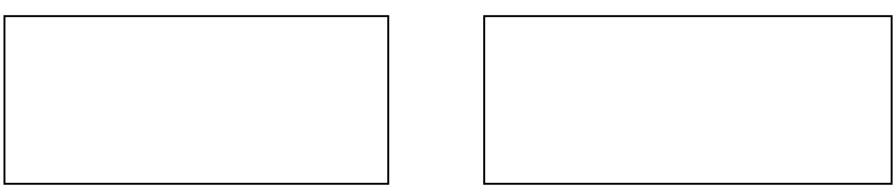


Figura 2.1

Términos
El término latín *per cent* expresa una razón; significa por cada ciento o: uno de cien.

Para crear una idea precisa de la misma forma, necesitamos comenzar con la idea de una **razón**, la cual es una manera de medir una cantidad en términos de otra. Una razón es generalmente (pero no siempre) expresada como una fracción. Por ejemplo, si Pat Pivot, la estrella central de un equipo de baloncesto, anotó 42 de sus 60 tiros, decimos que ella tiene "42 de 60." Podemos expresar esta medida relativa como una fracción, $\frac{42}{60}$, ó como un *por ciento*, el cual es una fracción especial –una fracción con un denominador implicado de 100.

1. **Expresa el récord de tiro de Pat Pivot de 42 de 60 como un por ciento. Luego explica cómo el proceso que usaste puede ser usado para expresar cualquier fracción como un por ciento.**
2. **Jeannie Jumpshot ha logrado encestar 28 de 49 tiros. En este índice, si ella tiene un total de 91 intentos en la temporada, ¿cuántos podría hacer durante la temporada? Explica cómo encontrar este número *sin* expresar el índice de tiros como un por ciento.**

PICTURE

He aquí un ejemplo de cómo se utilizan las razones. La Figura 2.2 de la edición de marzo del 1994 del *Railroad Model Craftsman* es un dibujo de un vagón. Fíjate lo que dice en la parte inferior izquierda.

$$\text{Escala O } \frac{1}{4}\text{"} = 1' - 0\text{"}; \ 1{:}\ 48$$

Esta línea explica la *escala* O una razón utilizada por muchos operadores de las vías férreas. El factor de la escala es $\frac{1}{4}$" = 1' – 0" que te deja saber que $\frac{1}{4}$ de pulgada en el modelo representa 1 pie en la vida real. La próxima parte, 1: 48, actualmente te dice lo mismo. Porque hay 48 cuartos de pulgada en un pie, cada cuarto de pulgada del modelo representa 48 cuartos de pulgada del vagón real. Esto es la razón del modelo a la longitud-real es 1:48. Los números de una razón se pueden escribir con dos puntos entre ellos o en forma de fracción. Ambos, 1:48 y $\frac{1}{48}$ representan la razón de 1 de 48.

DRAWING

Vagón de los Hnos. Carter. de 10 toneladas de espesor
El tamaño completo en una escala de O: ¼" = 1'0" 1:48

lado

Dibujado por Herman Darr
Todos los derechos comerciales reservados

Figura 2.2

"Vagón de los Hnos. Carter. de 10 toneladas de espesor (vista lateral)", dibujo de Herman Darr, página 66. Derechos Reservados © marzo del 1994 por *Railroad Model Craftsman,* Carstens Publications Inc. Reproducido con permiso.

Las medidas dadas en el dibujo indican que el vagón mostrado en la Figura 2.2 mide 28 pies de largo.

1. **¿Cuán largo es un modelo O a escala de este vagón?**
2. **Si la escala HO es definida por la razón 1:87, ¿cuán largo es un modelo HO a escala de este vagón? Redondea tu respuesta a la décima más cercana de una pulgada.**
3. **Si la escala N es definida por la razón 1:160, ¿cuán largo es un modelo N a escala de este vagón? Redondea tu respuesta a la décima más cercana de una pulgada.**

Si estuvieras construyendo un modelo O a escala del vagón en la Figura 2.2, necesitarías saber cuán ancho construir la puerta doble corrediza. Esa no es una de las medidas marcadas en el dibujo. ¿Cómo lo puedes descifrar mirando el dibujo? Una manera fácil es usando una **proporción**, una igualdad entre dos razones, como ésta:

- De la respuesta de la pregunta 1, arriba, sabemos que un modelo O a escala de este vagón tendría 7 pulgadas de largo.
- Mide la longitud en el dibujo del libro (el cual *no* es una ilustración del tamaño completo del modelo). Usando una regla de centímetros y milímetros, encuentra la longitud del vagón en el dibujo, alrededor de 12.4 cms.

- Luego, mide el ancho de la puerta doble en el dibujo. Esta es aproximadamente 4.1 cm. Esto significa que la razón del ancho de la puerta doble a la longitud del vagón es 4.1:12.4; en forma de fracción, es $\frac{4.1}{12.4}$.
- Ahora, debido a que la razón $\frac{\text{ancho de puerta}}{\text{longitud del vagón}}$ debe ser la misma que en el modelo del dibujo, prepara la ecuación

$$\frac{\text{ancho de puerta}}{\text{longitud del vagón}} = \frac{4.1}{12.4} = \frac{x}{7}$$

La solución para esta ecuación es el ancho de la puerta correcto *en pulgadas* para el modelo O a escala.

El solucionar esta ecuación depende de un hecho acerca de las fracciones que probablemente ya conoces. Dos fracciones son iguales si, y solamente si, obtienes el mismo producto de ambas maneras cuando "multiplicas en forma cruzada".

Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \text{ porque } 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

Usando este proceso en nuestra proporción, obtenemos

$$\frac{4.1}{12.4} = \frac{x}{7}$$

$$12.4x = 4.1 \cdot 7$$

$$x = \frac{28.7}{12.4}$$

$$x = 2.3 \text{ pulgadas (aproximadamente)}$$

Multiplicar en forma cruzada es una manera útil para probar si dos fracciones son iguales o no. ¿Por qué funciona? Eso es, ¿cómo está este proceso relacionado a la igualdad de dos fracciones? (*Pista*: Comienza contestando estas preguntas más simples.)

1. **¿Cómo sabes si dos fracciones con el *mismo denominador* son o no son iguales?**
2. **¿Cuál es una manera segura de encontrar un denominador común (no necesariamente el mínimo) para dos fracciones?**

1. **Supongamos que calculas el ancho de la puerta doble corrediza repitiendo el proceso que acabamos de describir, pero usas una regla de pulgadas (y fracciones de pulgadas), en vez de centímetros. ¿Obtendrás los mismos resultados finales? ¿Por qué sí o por qué no? Trátalo. ¿Resultó ser de la manera que pensabas que resultaría?**

2. **¿Cuál es el ancho de las puertas dobles corredizas en el vagón real?**
3. **Usa el método que describiste para conseguir la altura de las puertas corredizas en el modelo O a escala, y también en el vagón real. ¿Puedes usar una regla de centímetros o una de pulgadas?**
4. **¿Cuán alto de los rieles estará la parte de arriba del techo del vagón en la escala O? ¿Y en la vida real?**

Ahora podemos abordar la pregunta de describir más cuidadosamente la idea de objetos *similares*. Comienza tú primero.

¿Cómo las ideas de razones y proporciones pueden ser utilizadas para lograr una definición útil de lo que significa decir que dos formas son similares? Una vez tengas una definición que te guste, pruébala observando la Figura 2.3. ¿Son algunas de las figuras (b), (c), o (d) similares a (a)? ¿Hay más de una que sea similar a (a)? ¿Qué te dice *tu* definición?

Figura 2.3

Ahora es nuestro turno. Primero, he aquí un término muy útil que ocurre frecuentemente en las matemáticas –*constante*. Una **constante** es un número en particular que no cambia a través de todo un ejemplo o discusión. Algunas veces sabemos que un número es una constante, pero no sabemos o no queremos escribir su valor exacto. En tales casos, lo podemos representar con una letra y simplememente decir que esta letra es una constante.

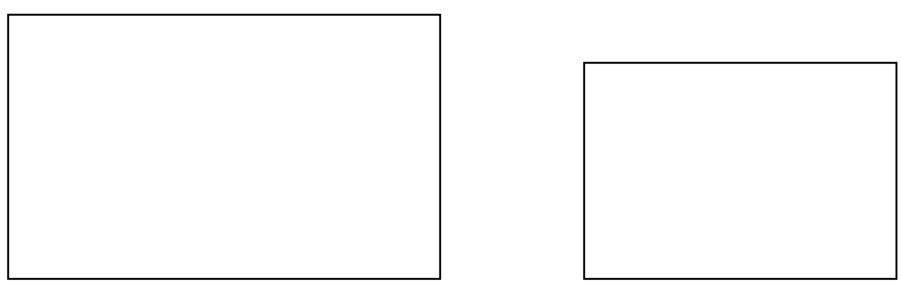
Palabra a conocer: Dos objetos son **similares** si hay una constante *k* para la cual la distancia entre cualesquiera dos puntos de un objeto es *k* veces la distancia entre los dos puntos correspondientes del otro.

Llamamos a la constante *k* un **factor de escala**. Algunas veces también se le llama la *constante de proporcionalidad*. A los objetos similares también se dice que están en *proporción* uno de otro. El factor de escala te dice la relación que hay entre los dos tamaños diferentes. Por ejemplo, la nota en la parte posterior izquierda de la Figura 2.2 dice que el factor de escala para el modelo O a escala del vagón es $\frac{1}{48}$. Esto significa que la distancia entre dos puntos de este modelo debe ser exactamente $\frac{1}{48}$ veces la distancia entre los dos puntos correspondientes del vagón real.

Observa la Figura 2.2.

1. **¿Cuál es el factor para un modelo HO a escala de este vagón?**
2. **Piensa en el modelo O a escala del vagón como el primer objeto en la definición de *similar* y piensa sobre el vagón real como el segundo. ¿Cuál es el factor de escala?**

He aquí un ejemplo simple: los dos rectángulos en la Figura 2.4 son similares. Debido a que un rectángulo es determinado por sus cuatro vértices (puntos de las esquinas), podemos corroborar su similaridad simplemente comparando las distancias entre los vértices correspondientes. En este caso, la distancia *WX* debe ser *k* veces la distancia *AB* para algún factor de escala *k* y la distancia *XY* debe ser *k* veces la distancia *BC* para la misma *k*.



Rectángulo F   Rectángulo G

Figura 2.4

Utilizando las medidas (en milímetros) de la Figura 2.4, tenemos

$$24 = k \cdot 45 \text{ y } 16 = k \cdot 30$$

Eso es, las razones $\frac{24}{45}$ y $\frac{16}{30}$ ambas deben ser iguales al mismo número, *k*. ¿Lo son? Puedes verificar esto de dos maneras:

1. simplifica las dos fracciones y mira a ver si consigues el mismo valor para *k*; o
2. verifica que las dos fracciones sean iguales al multiplicarlas de forma cruzada.

La segunda manera es usualmente más eficiente, particularmente cuando no necesitas conocer el valor del factor de escala. Aquí vemos que

$$\frac{24}{45} = \frac{16}{30}$$

porque

$$24 \cdot 30 = 45 \cdot 16$$

¿Verificaste nuestra aritmética para estar seguro? En otras palabras, las razones de las longitudes de los lados correspondientes forman una proporción.

Estas preguntas hacen referencia a la Figura 2.4.

1. **Usa el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal *AC* del rectángulo *F*. Verifica tu respuesta con una regla.**

2. **Usa una proporción para calcular la longitud de la diagonal *WY* del rectángulo *G*. Verifica tu respuesta con una regla.**

3. **Usa el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal *WY* del rectángulo *G*. Compara tu respuesta con tu respuesta a la parte 2.**

4. **Ya que estos dos rectángulos son similares, puedes multiplicar la distancia entre dos puntos del rectángulo *F* por un factor de escala para encontrar la distancia entre los dos puntos correspondientes del rectángulo *G*. ¿Cuál es el valor numérico de este factor de escala?**

5. **Puedes también multiplicar la distancia entre dos puntos del rectángulo *G* por un factor de escala para encontrar la distancia entre los dos puntos correspondientes del rectángulo *F*. ¿Cuál es el valor numérico de este factor de escala? ¿Cómo está relacionada a tu respuesta de la parte 4?**

Conjunto de ejercicios: 2.1

1. Una fotocopiadora ha reducido un diagrama por un factor de escala de 60%.

a) Si dos puntos están a 5 pulgadas de separación en el diagrama original, ¿cuán separados están en la copia?

b) Si dos puntos están a 1 pulgada de separación en el diagrama original, ¿cuán separados están en la copia?

c) Si dos puntos están a 2 pulgadas de separación en el diagrama original, ¿cuán separados están en la copia?

d) Si dos puntos están a 3 pulgadas de separación en la copia, ¿cuán separados están en el diagrama original?

e) Si dos puntos están a 1 pulgada de separación en la copia, ¿cuán separados están en el diagrama original?

f) Si dos puntos están a 2 pulgadas de separación en la copia, ¿cuán separados están en el diagrama original?

g) La persona que recibió la copia reducida del diagrama quiere agrandarlo a su tamaño original. ¿Qué factor de escala debe utilizar?

PICTURE

2. Ambos, el balompié americano y el balompié canadiense se juegan en campos rectangulares, pero los tamaños de los campos son diferentes:

- El campo americano mide $53\frac{1}{3}$ yardas de ancho, 100 yardas de largo de una línea de gol a otra línea de gol y tiene unas 10 yardas adicionales en la zona final de cada extremo.
- El campo canadiense mide 65 yardas de ancho, 110 yardas de largo de una línea de gol a otra línea de gol, y tiene unas 10 yardas adicionales en la zona final de cada extremo.

(a) Haz un boceto de cada campo y rotúlalo con las dimensiones apropiadas.

(b) Los dos campos de juego, sin las zonas finales, no están en proporción. ¿Cuán ancho tendría que ser el campo americano de cien yardas para que sea proporcional al campo canadiense?

(c) ¿Son proporcionales los dos campos de juego, incluyendo las zonas finales? Justifica tu respuesta.

(d) Los tamaños de las zonas finales no son proporcionales cuando se comparan con la longitud entre ellos de los campos de juego. ¿Cuán larga tendría que ser la zona final del campo canadiense para poder ser proporcional a la del campo americano?

(e) ¿Cómo las diferencias en los tamaños de los campos pueden afectar la estrategia del juego? ¿Conoces si hay alguna diferencia en una regla principal entre los dos juegos? ¿Cómo (si alguna) están relacionadas a los diferentes tamaños de los campos?

3. La Figura 2.5 muestra los dibujos a escala de la parte delantera y lateral del terminal de ferrocarril de Snydertown, PA. El dibujo muestra el largo, ancho y alto del terminal, y la información a escala es dada en la parte superior derecha.

(a) Si estuvieras construyendo un modelo HO a escala de este terminal y trabajando con una regla métrica, ¿cuál sería el largo, el ancho y el alto de tu modelo? Redondea tu respuesta al milímetro más cercano.

(b) Si estuvieras construyendo un modelo HO a escala de este terminal y estuvieras trabajando con una regla de pulgadas, ¿cuál sería la longitud, el ancho y el alto de tu modelo? Redondea tu respuesta a la centésima más cercana de una pulgada.

Terminal de Snydertown, PA
Dibujado por John Szwarc

Escala HO:
3.5mm = 1'-0" 1:87.1

"Terminal de Snydertown, PA" dibujo de John Szwarc, p. 85. Derechos reservados © marzo 1994 por el *Railroad Model Craftsman*, Carstens Publications, Inc. Reproducido con permiso.

Figura 2.5

4. Muchos modelos de ferrocarriles piensan en la escala HO como “la mitad-O.”

(a) Usando esta definición, ¿cuál es el factor de escala para la escala HO? Exprésalo como una razón y también como una fracción.

(b) ¿Cuál es la diferencia en longitud entre un modelo a escala de un vagón de 40 pies usando la razón de la mitad-O, versus un modelo del mismo vagón, usando la otra razón de escala HO, 1:87?

PICTURE

5. Has completado un dibujo con precisión que solamente se ajusta a un pedazo de papel de 11 × 17 pulgadas, sin espacio para disponer en cualquiera de los bordes.

(a) Necesitas una copia reducida que quepa dentro de una caja que mide 6 × 10 pulgadas para incluirla en un informe que está siendo preparado. ¿Cuál es el mayor factor de escala que puedes usar cuando estés ajustando la máquina copiadora? Redondea tus respuestas al por ciento más cercano. ¿Por qué redondearlo hacia un número más *bajo*?

(b) Tu dibujo ha gustado mucho y se va a hacer un afiche de él. El lado corto del afiche rectangular debe medir 2 pies de largo; el otro lado puede ser cortado exactamente según tus especificaciones. Si no quieres dejar un margen adicional, ¿qué factor de escala debes usar? ¿Cuán largo debe ser el otro lado del afiche? Redondea tu respuesta a la décima más cercana de una pulgada.

6. Este ejercicio se refiere a la Figura 2.4. Comienza trazando o copiando esta figura en un pedazo de papel.

(a) En el lado *DC* del rectángulo *F*, marca el punto que está a 30 mm. a la derecha de *D*. Llama a este punto, *P*. Luego, encuentra y marca el punto correspondiente, *P*' ("*P* primo"), en el rectángulo *G*.

(b) En el lado *DA* del rectángulo *F*, marca el punto que está a 15 mm. debajo de *D*. Llama a este punto *Q*. Luego encuentra y marca el punto correspondiente, *Q*', en el rectángulo *G*.

(c) Usa el Teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre *P* y *Q* en el rectángulo *F*. Redondea tu respuesta al mm. más cercano. Revisa tus resultados midiendo. ¿Conseguiste la misma respuesta? Si no es así, explica qué salió mal.

(d) Encuentra la distancia entre *P*' y *Q*' en el rectángulo *G* de tres maneras diferentes:

- usando el Teorema de Pitágoras
- usando el factor de escala y
- midiendo.

Redondea tu respuesta al mm. más cercano. ¿Cuál manera fue más fácil? ¿Cuál manera piensas es la más precisa? ¿Cuál manera te gustó más? ¿Por qué?

(e) En el lado *ZY* del rectángulo *G*, marca el punto que está a 10 mm. a la derecha de *Z*. Llama a este punto *R*'. Luego encuentra y marca el punto correspondiente, *R*, en el rectángulo *F*.

(f) En el lado *YX* del rectángulo *G*, marca el punto que está a 12 mm. debajo de *Y*. Llama a este punto *S*'. Luego encuentra y marca el punto correspondiente, *S*, en el rectángulo *F*.

(g) Encuentra la distancia entre *R* y *S* midiendo y de alguna otra manera. Redondea tu respuesta al mm. más cercano. ¿Tuviste la misma respuesta de ambas maneras? Si no es así, explica lo que salió mal.

7. ¿Está fuera de proporción el dibujo de Alicia en la Figura 2.6? ¿Cómo lo sabes? Relaciona tu explicación a nuestra definición matemática de proporción.

Figura 2.6