2.10 Estirando y encogiendo volúmenes

Según el área se mide en unidades cuadradas, el volumen se mide en unidades cúbicas. Para la longitud de cualquier unidad, puedes pensar en el volumen de algo como si estuviera lleno de pequeños cubos de 1 por 1 por 1 (y cubos parciales). Puedes encontrar el volumen aproximado de un objeto contando los cubos. Haces una mejor aproximación al escoger un tamaño pequeño de cubo. Aquí hay un ejercicio para ayudarte a desarrollar tu imaginación sobre el espacio.

Observa las cuatro cajas en la Figura 2.70.

1. **Una de las tres cajas altas –A, B, C– es proporcional a la caja X. ¿Cuál piensas qué es? ¿Por qué? ¿Cuál piensas es el factor de escala?**
2. **Si la caja X tiene capacidad para un cuarto de compota de manzanas, ¿cuánta compota piensas que puede sostener la caja A? ¿Qué tal la caja B? ¿La caja C? Explica tus respuestas.**
3. **Si la caja X mide 4 por 3 por 5 pulgadas, ¿cuáles serían las medidas de una caja similar con un factor de escala de 10? ¿Cuál es el volumen de la caja X en este caso? ¿Cuál es el volumen de la caja escalada?**

Box = caja

Figura 2.70

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Calcular el volumen de una figura escalada de su volumen original y el factor de escala

Encontrar el factor de escala para una figura escalada de su volumen original y su volumen escalado.

Sugerencias
Usa notación apropiada.
Algunas veces describir un proceso con una forma algebraica te ayudará a ver cómo y por qué funciona.

Las ideas detrás de la Figura 2.70 nos llevan al principio de cómo el volumen es afectado por la escala. Como sabes, el volumen de una caja rectangular es el producto de su longitud, grosor y altura. Si escribimos esta afirmación en forma algebraica, la fórmula nos dice exactamente cómo el volumen de tal caja es cambiado por la escala. Supongamos que una caja tiene una longitud l, grosor w, altura h, y volumen V. Entonces

$$V = l \cdot w \cdot h$$

Si la caja es escalada por un factor k, entonces, cada una de sus medidas lineales – longitud l, grosor w, altura h y volumen V es multiplicado por k. Así, el volumen escalado, el cual llamaremos V_k, es

PLACE EQUATIONS HERE

Esto es, el volumen escalado es k^3 veces el volumen original.

Los volúmenes de otras figuras son afectados por la escala de la misma manera que los volúmenes de las cajas. En particular, el volumen de un cubo de la longitud del borde s es s^3, y si el cubo está escalado por un factor k, el volumen del cubo escalado es

$$(ks)^3 = k^3s^3$$

Eso es, el volumen escalado es k^3 veces el volumen original. Ahora, recuerda del capítulo 1 que podemos aproximar el volumen de cualquier forma tridimensional por cubos. Si escalamos la forma por un factor k, entonces, el volumen de cada cubo cambia por el factor k^3. Esto significa que el volumen de la aproximación entera cambia por k^3.

Dato a conocer: Si una figura tridimensional es escalada por un factor k, entonces, el volumen que encierra es k^3 veces el volumen que encierra la figura original.

…………………………………………………………………………………….

1. **Un recipiente rectangular de 2.5 por 8 por 10 pies contiene plástico para empacar en forma de cacahuates. ¿Qué capacidad de este tipo de empaque sostendría? Si un construye un segundo recipiente, agranda las dimensiones del primero por un factor de 3, ¿qué volumen de este tipo de empaque sostendrá? ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo recipiente?**

2. **Una compañía está experimentando con cartones de jugo de diferentes tamaños. Su tamaño gigantesco institucional es 56 cm. de alto y caben 68,600 cc de jugo. Ellos quieren hacer un envase con un tamaño a proporción de sólo 16 cm. de altura. ¿Qué factor de escala deben de usar? ¿Qué volumen sostendrá el envase pequeño?**

Si conoces cómo el volumen de una figura debería ser cambiado por escala, ¿podrías encontrar el factor de escala necesario? Sí, puedes. Los siguientes problemas son un ejemplo de tal situación.

Una investigación del mercado le dice a la Crunchy Cereal Co. que a los consumidores en realidad les gusta la forma del tamaño regular de su caja de hojuelas de maíz. La caja mide 11 pulgadas por 8 pulgadas por 2.5 pulgadas. La compañía quiere mantener esta forma para su súper-tamaño y para sus cajas de servicios individuales.

1. **La caja del súper-tamaño debe tener un volumen de 400 pulgadas cúbicas. Redondéalo a dos lugares decimales, ¿qué factor de escala debería usarse para hacer una caja de la misma forma que la caja regular? ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja del súper-tamaño?**
2. **La caja de servicio individual debe tener un volumen de 20 pulgadas cúbicas. Redondeado a dos lugares decimales, ¿qué factor de escala debería usarse para hacer una caja con la misma forma que la caja regular? ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja de servicio individual?**

He aquí un relato famoso de la historia antigua.

En el año 430 A.C., ocurrió una terrible plaga en Atenas. Los atenienses desesperados, buscando una manera de detener la plaga apelaron al oráculo de Apolo. El oráculo les dijo a ellos que deberían de doblar el tamaño del altar cúbico de Apolo. Ellos construyeron un nuevo altar, un cubo con *cada borde* dos veces más largo que el borde del viejo altar. Por supuesto, esto convirtió el nuevo altar ocho veces el tamaño del viejo. En vez de detenerse, la plaga empeoró. Dándose cuenta de su error, los atenienses apelaron a Platón para que los ayudara. Luego de decirles que el oráculo les había dado este problema “para reprocharle a los Griegos por haber descuidado las matemáticas y su menosprecio a la geometría”,[4] Platón estaba determinado a encontrar la longitud apropiada para un nuevo altar cuyo volumen era exactamente el doble del viejo.

PICTURE

[4] David M. Burton, *The History of Mathematics* (Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1985), pág.134.

Explica cómo este relato se relaciona con el material de esta sección y cómo podrías resolver el problema de los atenienses. Si tú y tu calculadora estuvieran en Atenas en el año 430 A.C., ¿crees que hubieras podido solucionar el problema lo suficientemente bien para satisfacer al oráculo de Apolo? Si es así, hazlo. Si no, explica por qué no.

REFLEXIONA

En este capítulo has aprendido muchos datos diferentes, todos relacionados con la similitud, escala y tamaños de ángulos.

- Aprendiste sobre los factores de escala para hacer copias de diferentes tamaños de una misma figura.
- Has visto dos diferentes maneras de medir ángulos, por la pendiente y por grados y aprendiste sobre las funciones de las calculadoras que convierten de una a otra.
- Has visto relaciones entre los ángulos formados por líneas paralelas cortadas por una transversal, la cual lleva a un hecho muy importante, que la suma de los ángulos de *cualquier* triángulo es 180º.
- Aprendiste sobre conjuntos de medidas que determinan un triángulo hasta la congruencia: **SAS, SSS, ASA,** y **AAS**.
- Has visto cómo los datos acerca de los triángulos se pueden usar para conseguir información sobre otros polígonos.
- Finalmente, viste cómo la escala afecta el área y los volúmenes de figuras bidimensionales y tridimensionales.

Estos hechos se encuentran entre los más importantes elementos fundamentales en toda la geometría, como verás en los siguientes capítulos.

En el próximo capítulo observamos más de cerca a los triángulos rectángulos. Basándonos en cosas como la medida de la pendiente, se desarrolla y explica algunas herramientas útiles para bregar con ángulos. Estas herramientas se tornan en funciones poderosas e importantes que juegan un rol principal en muchas áreas de las matemáticas y las ciencias. Estas ideas son la base de la materia llamada *trigonometría*.

Conjunto de ejercicios: 2.10

1. Elka quiere hacer sillas rellenas de bolitas para sus gemelos cuando se vayan a la universidad. Ella tiene un patrón para una figura de una caja rectangular de 18 por 18 por 20 pulgadas. Su amiga Liz usó este patrón para hacer una silla para su hija. A Elka le gusta esa silla, pero no cree que sea lo suficientemente grande para que sea cómoda. Ella está pensando agrandar el patrón por un factor de 2.

(a) La cantidad de relleno necesario para la silla que Liz hizo fue de 3.75 pies cúbicos. ¿Cuánto relleno necesitará Elka para el diseño de su silla?

(b) El relleno viene en paquetes de 2 pies cúbicos por $8.99 el paquete. ¿Cuánto le costó a Liz rellenar la silla que ella hizo? ¿Cuánto le costará a Elka rellenar las dos sillas agrandadas para sus gemelos?

(c) Elka piensa que le costará mucho hacer las sillas como lo planificó. En cambio, ella decide agrandar el patrón solamente por un factor de 1.5. ¿Cuánto le costará el relleno para estas dos sillas?

PICTURE

2. La SugarSweet Company está haciendo un cubo de azúcar nuevo y más grande. Ellos promocionan que contiene tres veces la azúcar del cubo que mide 1 por 1 por 1 cm. Calcula las dimensiones del cubo de azúcar grande.

3. Alan Arf, el famoso escultor de animales, ha sido comisionado para tallar una galleta para perros en mármol para una exhibición fuera de las oficinas centrales de Postman's Friend Dogfood Co. Para hacer un modelo preliminar de su trabajo, Alan comenzó con un bloque de madera de 1 por 1 por 2.5 pies. Este resultó ser justamente la forma adecuada para comenzar, así que él quiere comenzar la escultura real con un bloque de mármol que sea proporcional al bloque de madera. Él quiere que el bloque de mármol sea tan grande como sea posible. Sin embargo, tiene que ser enviado por un camión y la máxima carga permisible de envío es 60,000 libras. Asumiendo que el mármol pesa 200 libras por pie cúbico, ¿cuáles son las dimensiones del bloque de mármol más grande que puede conseguir?

PICTURE

4. En esta sección leíste este argumento:

El volumen de la longitud del borde del cubo s es s^3 y si el cubo está escalado por un factor k, el volumen del cubo escalado es

$$(ks)^3 = k^3s^3$$

Esto es, el volumen escalado es k^3 veces el volumen original.

Escribe nuevamente este argumento *sin usar ningún símbolo algebraico o letras que simbolicen cantidades.* Luego, escribe un párrafo explicando por qué las letras y otros símbolos se usan en las matemáticas.