

2.2 Los triángulos y rectángulos similares

Hay mucha información acumulada dentro de la definición de similaridad, junto con una dificultad oculta. Vamos a desempacarla cuidadosamente. ¿Recuerdas lo que dice? Aquí está nuevamente, faltando dos palabras claves. ¿Puedes llenar los blancos?

Dos objetos son **similares** si hay una constante k para la cual la distancia entre _____ dos puntos de un objeto es k veces la distancia entre los dos puntos _____ del otro.

La primera palabra que falta es *cualquiera*. Esto significa que no puedes controlar la elección entre dos puntos cuando aplicas esta definición. No importa cuales dos puntos *cualquier persona* escoja, la misma constante k deberá funcionar para ellos. La dificultad está oculta en la segunda palabra escondida. ¿Sabes cuál es la palabra? ¿Puedes describir la dificultad? Trata de descifrarla al contestar las siguientes preguntas.

Estas preguntas hacen referencia a las dos regiones rectangulares, F y G , en la Figura 2.7 de la próxima página:

1. ¿Puedes decir con tan sólo mirar estas regiones triangulares, *exactamente* a cuál punto de la región F debe corresponder el punto A de G ? ¿Qué tal el punto B ?
2. Encuentra un punto de G para el cual, con tan sólo mirarlo, sepas exactamente el punto correspondiente de F . ¿Puedes encontrar dos puntos de G para los cuáles sepas que son puntos correspondientes de F ? ¿Tres? ¿Cuatro? Explica tus respuestas.
3. Supongamos que sabes que esas dos regiones triangulares son similares. ¿Cómo puedes encontrar cuál punto de F corresponde exactamente con el punto A de G ? Hazlo si puedes, y describe tú método. ¿Funcionará tu método para el punto B ? ¿Por qué sí o por qué no?
4. ¿Cuál es la dificultad en aplicar la definición de similaridad?

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Copiar triángulos y rectángulos a varias escalas usando un factor de escala para encontrar las distancias entre los vértices

Decidir si dos triángulos o rectángulos son o no son similares al comparar las razones de la longitud de sus lados

Estimar y calcular el factor de escala necesario para ajustar un triángulo o rectángulo dado en un espacio en particular.

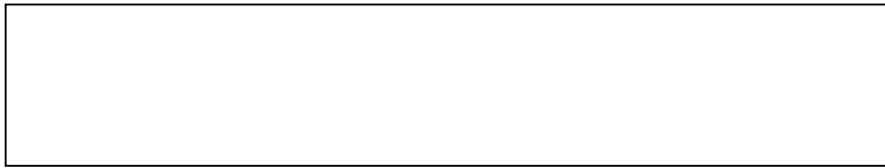


Figura 2.7

En la Figura 2.8 se muestran dos dibujos. Haz una copia de cada uno que sea dos veces el tamaño del original. Eso es, que hagas una copia que tenga un factor de escala de 2. ¿Cuál es más fácil hacer, (a) o (b)? ¿Por qué?



Figura 2.8

¿Te ayudaron las preguntas sobre las Figuras 2.7 y 2.8 a ver cuál es la dificultad en usar la definición de figuras similares?

El problema es decidir cuáles puntos de una figura realmente corresponden a cuáles puntos de la otra.

Para los triángulos, el proceso es fácil. Un triángulo se determina por sus vértices (sus esquinas). Una vez conoces dónde están las tres vértices, encajará un triángulo solamente. Pero algunas veces el determinar cuál de los vértices de un polígono corresponde a cuáles vértices de otro no es tan simple. En muchas situaciones sólo te tienen que decir cuál es la correspondencia. Hay dos maneras comunes de hacer esto.

- Los vértices correspondientes de dos figuras frecuentemente están marcados con la misma letra, pero con diferentes subíndices para indicar en cuál figura está el vértice. Por ejemplo, cuando escribimos dos triángulos como $\Delta A_1 B_1 C_1$ y $\Delta A_2 B_2 C_2$, nos referimos a que el vértice A_1 del primer triángulo corresponde al vértice A_2 del segundo triángulo, B_1 corresponde a B_2 y C_1 corresponde a C_2 .
- Algunas veces el orden en el cuál los vértices son enumerados tiene la intención de decirte la correspondencia entre los vértices de dos polígonos. Frecuentemente éste es el caso en exámenes estandarizados. Por ejemplo, si dos triángulos semejantes se escriben como ΔABC y ΔDEF , se espera que asumas que A corresponde a D , B corresponde a E y C corresponde a F .

La primera de estas maneras es más clara, pero la segunda es más simple. Este libro generalmente usa el método más simple, a menos que sea confuso. A no ser que te digan lo contrario, asume que el orden en el cual los vértices de dos polígonos están enumerados te dice la correspondencia entre ellos.

Puesto que los vértices de un triángulo determinan su tamaño y forma, dos triángulos son similares si las distancias entre los vértices de un triángulo son proporcionales a las distancias entre los vértices correspondientes del otro. Estos son demasiados términos para expresar una idea muy simple. Es más fácil y claro con símbolos, como se muestra a continuación:

Triángulos $A_1 B_1 C_1$ y $A_2 B_2 C_2$ son semejantes si las tres razones de las longitudes de sus lados correspondientes son iguales. En símbolos,

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} = \frac{A_1 C_1}{A_2 C_2}$$

Para demostrarte cómo el asumir la correspondencia de los vértices del orden enumerado, hace más fácil leer y escribir dichas expresiones, nosotros volvemos a exponer este principio tan importante sin usar subíndices.

$$\Delta ABC \text{ y } \Delta DEF \text{ son similares si } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

¿Cuál de estas dos formas piensas *tú que* es más fácil de entender?

**1. ¿Son similares los tres triángulos de la Figura 2.9?
Usa una regla para ayudarte a justificar tu respuesta.**

2. ¿Puedes dibujar dos triángulos, ABC y DEF para los cuáles

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

los triángulos no son similares? Si puedes, hazlo. Si no, explica por qué no se puede hacer.



Figura 2.9

Para los rectángulos, hay aún una manera más fácil de probar la simplicidad. Dos rectángulos tienen la misma forma si las razones de sus longitudes se igualan a las razones de sus grosores. En símbolos, dos rectángulos $ABCD$ y $EFGH$ (como se muestran en la Figura 2.10) son similares si

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$

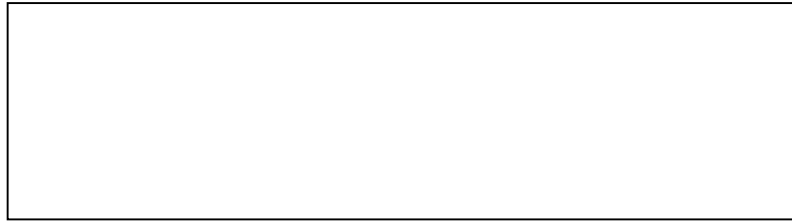
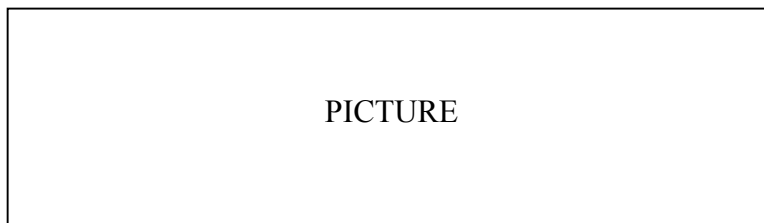


Figura 2.10

La prueba para rectángulos similares verifica solamente tres de los cuatro puntos de las esquinas. ¿Qué tal el cuarto punto? Haz referencia a la Figura 2.10 para contestar estas preguntas.

1. Supongamos que $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = k$ (donde k es el factor de escala). ¿Por qué las razones de los lados correspondientes que se encuentran en D y H también igualan k ?
2. ¿Por qué los lados de las diagonales correspondientes tienen también la misma proporción? (*Pista:* Usa el Teorema de Pitágoras.)



El principio de la pregunta 2 es muy importante:

Si dos rectángulos son similares, con un factor de escala k , entonces, la razón de las longitudes diagonales correspondientes también son iguales a k .

Podemos usar este hecho para ver cómo funciona la similaridad para un sistema de coordenadas rectangular en un plano. Supongamos que tienes dos puntos –digamos A y B – en cualquier lugar del plano. Si estiras o encojes el plano por el mismo factor de escala en ambas direcciones de la coordenada, entonces, *la distancia entre A y B se estirará o se encogerá por ese mismo factor de escala.*

La Figura 2.11 muestra cómo este dato es el resultado de la afirmación acerca de los rectángulos. Los dos puntos, A y B , pueden ser considerados como las esquinas diagonales opuestas de un rectángulo con lados paralelos a los ejes de las coordenadas. Cuando un plano es estirado por el factor de escala –en este caso, 3– en ambas direcciones de las coordenadas, la longitud y el ancho del rectángulo son multiplicados por 3. Esto significa que la distancia diagonal también se multiplica por 3.

Estas preguntas se refieren a la Figura 2.11:

1. **Supongamos que el punto A del rectángulo izquierdo está a 1 cm. a la derecha del origen y 1 cm. sobre el origen. ¿Qué coordenadas describen el punto A del rectángulo derecho?**
2. **Supongamos también que $l = 4$ cm. y $w = 2$ cm.**
 - (a) **¿Qué coordenadas describen el punto B del rectángulo izquierdo?**
 - (b) **¿Qué coordenadas describen el punto B del rectángulo derecho?**



Figura 2.11

He aquí una manera útil de probar si dos triángulos rectángulos son similares:

Dos triángulos rectángulos son similares si la razón de los catetos de un triángulo es igual a la razón de los catetos del otro.

En otras palabras, supongamos que el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ son dos triángulos rectángulos con ángulos rectos en C y F . Si

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

entonces, los dos triángulos deben de ser similares.

¿Por qué esta prueba de similaridad para los triángulos rectángulos funciona? (Pista: Comienza dibujando un diagrama y marcándolo cuidadosamente. Luego, observa cómo atendemos la similaridad de los rectángulos. ¿Cómo están relacionados los triángulos rectángulos a los rectángulos?

Supongamos que estiras las coordenadas en un plano por 5 en la dirección de x y por 2 en la dirección de y . ¿Será la distancia entre cualesquiera dos puntos en el plano estirada por una cantidad constante predecible? Si es así, ¿cuál es la cantidad? Si no es así, explica por qué no.

Cuando caminas alejándote de algo, parece que se achica; pero cuando caminas hacia él, parece agrandarse. Por ejemplo, supongamos que tomas una fotografía de una casa a 1,000 pies de distancia, luego, caminas hacia la casa hasta que solo te faltan 200 pies para llegar y, tomas otra fotografía. La imagen de la casa en la primera fotografía será mucho más pequeña que la imagen en la segunda, ¿verdad? Pero todas las dimensiones de la casa cambiarían por el mismo factor de escala, así que la casa se vería igual; eso es, que dos imágenes serían similares. “Acercar el tamaño de la imagen” con una calculadora gráfica o una computadora funciona así. El acercar el tamaño de la imagen lo hace ver como si estuvieras caminando hacia el objeto que se está diagramando; alejar el tamaño de la imagen lo hace ver como si estuvieras alejándote de él.”

Las calculadoras gráficas usan factores de escala para acercar el tamaño de la imagen. La mayoría de las calculadoras gráficas te permiten escoger los factores de escala horizontal o vertical separadamente. Sin embargo, los parámetros preestablecidos usan el mismo factor para ambos ejes de coordenadas.



PICTURE

Las siguientes preguntas te ayudarán a ver cómo funciona el acercar la imagen en tu calculadora gráfica. Comienza colocando estas cuatro ecuaciones en la lista de ecuaciones.

$$Y_1 = X \qquad Y_2 = X - 1 \qquad Y_3 = -X \qquad Y_4 = X + 1$$

1. **Localiza el menú en el cual los factores de acercar la imagen aparecen y toma nota de la forma en que están colocadas ahora.**
2. **Haz una gráfica de las cuatro funciones juntas, usando la configuración estándar de WINDOW. Luego usa el menú de ZOOM (acercamiento o alejamiento de la imagen) para acercar la imagen y describir lo que sucede. Relaciona tu descripción a los factores ZOOM. ¿Qué sucede si acercas la imagen dos veces?**
3. **Regresa a la configuración estándar. Entonces aleja la imagen y describe lo que sucede. Relaciona tu descripción a los factores de ZOOM. ¿Qué sucede si alejas la imagen dos veces?**

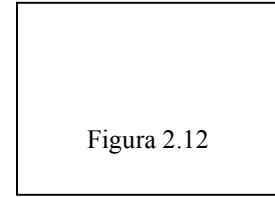
Reajusta los factores ZOOM de X y Y a la mitad de su configuración original. Entonces, comenzando con la configuración estándar, acerca y aleja la imagen. Ahora reajusta los factores de ZOOM como sigue: Establece el factor X a 6 y el factor Y a 2. Luego, comenzando con la configuración estándar, acerca y aleja la imagen. Trata lo mismo con las configuraciones revertidas de X y Y.

4. **¿Cuáles de los factores de acercar la imagen de X y Y te dan fotografías semejantes?**
5. **¿Por qué piensas que la configuración establecida de tu calculadora utiliza los mismos factores de acercar la imagen para ambos, el eje de x y el eje de y ?**

Precaución: Al discutir sobre como acercar/alejar la imagen, hemos estado hablando sobre la *apariencia* – ya sea que la figura se *vea* más grande o más pequeña. Si tú piensas en las figuras como gráficas, en realidad no cambias las coordenadas de ningún punto porque la escala en los ejes está cambiada también por el factor de escala. Por ejemplo, cuando acercas una imagen por un factor de 2, el espacio de la marca de ajuste que está en los ejes se duplica. Esto da la impresión de que el objeto al que te estás acercando es el mismo, sólo visto de manera más cercana (zoom in) o más lejana (zoom out).

Conjunto de ejercicios: 2.2

1. Una compañía local está llevando a cabo un concurso para un diseño de un logo nuevo. El boceto de tu diseño, mostrado en la Figura 2.12, ha logrado llegar a ronda la final. Ahora la compañía quiere que lo sometas en dos tamaños, para juzgar como se verá



- en los afiches: la base del triángulo grande deberá ser de 24 cm. de longitud.
- en útiles de papelería: la base del triángulo grande deberá ser de 18 mm. de longitud.

La base del triángulo grande en tu boceto es exactamente 3 cm. y su altitud es 2 cm.

- (a) ¿Qué factor de escala deberás usar para hacer la versión del tamaño de afiche de tu diseño?
- (b) ¿Cuál sería la altitud de la versión del tamaño de afiche de tu diseño?
- (c) ¿Cabría la versión del afiche en un papel estándar de 8.5×11 pulgadas?
- (d) ¿Qué factor de escala deberás usar para la versión del tamaño de útiles de papelería de tu diseño?
- (e) ¿Cuál sería la altitud de la versión de útiles de papelería de tu diseño?
- (f) Para reproducir este boceto en estos tamaños, irás a la imprenta más cercana para que lo fotocopien. Cuando llegas allí, descubres que la máquina sólo reconoce por cientos. Expresa los dos factores de escalamientos que necesitas en por cientos.
2. Cada línea de la tabla en la Figura 2.13 hace referencia a dos triángulos, $\Delta 1$ y $\Delta 2$. Tu maestro te dará una copia de esta tabla. En cada caso, el $\Delta 1$ tiene lados de longitudes a , b y c . Los lados correspondientes del $\Delta 2$ tienen longitudes d y f , respectivamente.
- Dibuja un boceto de tal situación. Rotula los lados correspondientes de los dos triángulos como se te dan aquí.

- En cada línea, las longitudes de algunos de los lados han sido dados (en pulgadas). Encuentra los valores de los datos que faltan para que el $\Delta 1$ y el $\Delta 2$ sean similares. También encuentra el factor de escala (del $\Delta 1$ al $\Delta 2$) en cada caso. Puedes copiar la tabla en tu papel y completarla si esto te ayuda a organizar tu trabajo. Usa tu calculadora siempre que quieras.

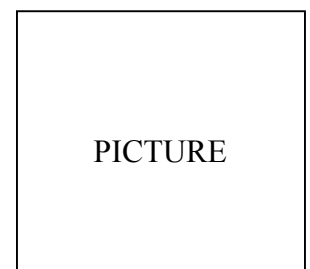
Triángulo 1	Triángulo 2	Factor de escala

Figura 2.13

3. El Departamento Make More Money del Servicio Postal de E.E.U.U. ha decidido mercadear un conjunto de losetas de cerámicas conmemorativas mostrando los diseños populares de estampillas de los años de la década del 1990. Las losetas serán de 6 pulgadas cuadradas, adecuadas para decorar los mostradores de la cocina, duchas, senderos en los patios, etc. Las estampillas a copiar vienen en 4 tamaños diferentes, incluyendo el borde.
- (a) emisión regular: 20×22 mm.
 - (b) conmemorativo estándar: 42×22 mm.
 - (c) conmemorativo grande: 28×36 mm.
 - (d) emisión especial (estampillas de amor, etc.): 27×20 mm.

Para cada tamaño de estampilla, encuentra el factor de escala que hará su diseño lo más grande posible en la loseta. Luego encuentra las dimensiones del diseño de la loseta a escala. Redondea tu respuesta final a la décima de una pulgada más cercana. (*Pista:* En cada caso, una de las dimensiones deberá ser de 6 pulgadas).

4. La pequeña liga de béisbol es semejante a las grandes ligas en muchas maneras. El diamante de las grandes ligas de béisbol es un cuadrado de 90 pies en un lado y la distancia del montículo del lanzador al plato es de 60.5 pies. El diamante de las pequeñas ligas es de 60 pies en un lado.
- (a) Usando tu regla, dibuja un cuadrado para representar el diamante de las grandes ligas y luego dibuja un cuadrado en proporción que represente el diamante de las pequeñas ligas.



- (b) Usa tu calculadora para encontrar la distancia proporcional del montículo del lanzador al plato en las pequeñas ligas, asumiendo que los dos diamantes están en proporción.
 - (c) Otra liga de béisbol es llamada la liga intermedia. El diamante de esta liga es un cuadrado de 75 pies en un lado. Usando tu regla, dibuja un cuadrado que represente el diamante de la liga intermedia que es proporcional a tus dibujos de los otros dos diamantes.
 - (d) Usa tu calculadora para encontrar la distancia proporcional del montículo al plato en la liga intermedia, asumiendo que el diamante es proporcional al diamante de las grandes ligas.
 - (e) Las distancias oficiales del montículo al plato son 46 pies en las pequeñas ligas y 54 pies en la liga intermedia. Éstas *no* deberían estar de acuerdo con las respuestas que obtuviste en las partes (b) y (d). ¿Son las distancias oficiales más largas o más cortas que las proporcionales? ¿Por qué piensas que este es el caso?
5. La compañía de General Crunchies está comenzando una serie de modelos para recortar en la parte posterior de las cajas de desayunos, comenzando con un tema de acampar. El primer modelo para recortar es una pequeña carpa para acampar muy fácil de montar de 7 pies de largo, 4 pies de ancho en la base y 3 pies de alto en la cima. En la Figura 2.14 se muestra un patrón del diseño y cómo montar las piezas recortables de la carpa. Las líneas entrecortadas son para los pliegues, y las piezas con líneas son las pestañas para pegar el modelo.

Desafortunadamente, la persona que hizo este boceto, no lo hizo con cuidado; algunas de las longitudes y esquinas no están correctas. Tu trabajo es: hacer un patrón preciso para este modelo para recortar, a una escala de $\frac{1}{2}$ pulgada a 1 pie. Las medidas mostradas te darán suficiente información para determinar el resto de la figura. Una regla y un compás son las únicas herramientas que necesitarás. He aquí algunas preguntas que te ayudarán mientras haces tu dibujo.

- (a) ¿Cuál es el factor de escala para este modelo?
- (b) ¿Cuáles son las dimensiones de cada pared inclinada de la carpa?
¿Cómo lo puedes determinar?
- (c) Cada solapa frontal es un triángulo rectángulo. Si se cortan y se doblan con precisión, cerrarán la parte del frente de la carpa sin superponerse. ¿Cuáles son las longitudes de los lados de estos triángulos? ¿Cómo lo sabes?

- (d) ¿Cómo puedes usar un compás para encontrar la posición correcta de las esquinas del ángulo recto de las solapas frontales?
- (e) ¿Cuán ancho deberás hacer las pestañas para pegar? Esta es una elección libre, dentro de lo razonable.
- (f) ¿Cabrará tu patrón en la parte posterior de la caja de cereal? ¿Cuál es la longitud y anchura máxima?

Dibuja un patrón en un papel en blanco. Entonces córtalo, dóblalo y pégalo todo junto. ¿Funciona tu patrón?

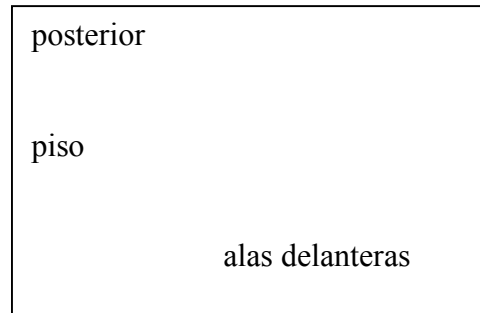


Figura 2.14

6. El segundo en esta serie de modelos para recortar de General Crunchies, es un cobertizo. Éste mide 8 pies de un lado a otro, 7 pies de la parte delantera a la trasera, con una pared trasera baja de 3 pies de alto. La apertura delantera es 6.5 de alto, y la cima sobresale alrededor de 6 pulgadas en cada dirección. En la Figura 2.15 se muestra un boceto del patrón recortable para este cobertizo. Las líneas entrecortadas son para los pliegues y las piezas con líneas son las pestañas para pegar el modelo.

Usando una regla y un compás, haz un patrón preciso para este modelo para recortarse en un pedazo de papel en blanco, a una escala de $\frac{1}{2}$ pulgada a 1 pie. Dibuja tu patrón en un pedazo de papel en blanco. Luego córtalo, dóblalo y pégalo todo junto.

Si tu patrón fuera a ser colocado en la parte trasera de la caja de cereal, ¿cuán grande deberá ser la parte posterior de la caja?

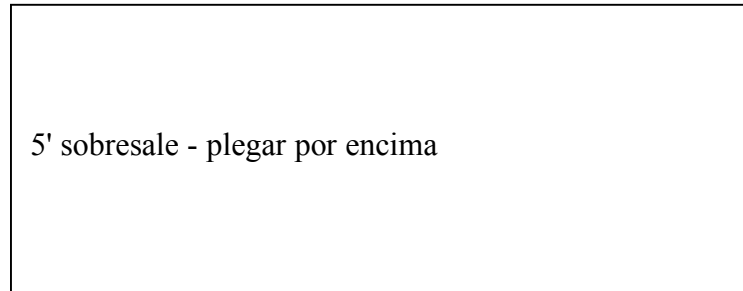


Figura 2.15

7. Supongamos que estás dibujando un triángulo nuevo que es semejante a uno que te han dado.
 - (a) Si el factor de escala es mayor que 1, ¿será el nuevo triángulo mayor o menor que el que te han dado?
 - (b) Si el factor de escala es positivo pero menor que 1, ¿será el nuevo triángulo mayor o menor al que te han dado?
 - (c) Si el factor de escala es 1, ¿cómo se verá la figura nueva?
 - (d) Si el factor de escala es 0, ¿cómo se verá la figura nueva?
 - (e) ¿Hace sentido tener un factor de escala negativo? ¿Por qué sí o por qué no?
8. Muestra que la prueba de semejanza para los rectángulos,
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$
no funciona para todos los cuadriláteros. Eso es, dibuja dos cuadriláteros, $ABCD$ y $EFGH$, que no son semejantes, pero para lo cual esta ecuación es cierta. Verifica estas condiciones midiendo tu dibujo.
9. Provee un argumento convincente para justificar la siguiente afirmación: dos triángulos rectángulos son similares cada vez que las razones de las longitudes de cualesquiera dos pares de sus lados correspondientes son iguales.