

2.3 Como medir ángulos

Has visto que la semejanza depende en conocer los puntos correspondientes de los objetos. También has visto que los puntos más fáciles de identificar son los “puntos de esquina,” los vértices de los ángulos. Generalmente, todos los vértices (y algunos otros puntos) en un diagrama están rotulados con letras. Esto lo hace fácil para nombrar y mantener un registro de los ángulos. A veces el vértice sólo es suficiente para identificar el ángulo. Cuando muchos ángulos diferentes tienen el mismo vértice, otros puntos son usados para identificar los lados, como viste en el capítulo 1.

También viste que dos ángulos son **congruentes** si uno se puede colocar encima de otro de manera que sus vértices pareen y sus lados correspondientes estén situados a lo largo de los mismos rayos. Un **rayo** es parte de una línea que comienza en un punto particular y se extiende lejos indefinidamente en una dirección.

En la Figura 2.16, el $\angle A$ es congruente a exactamente uno de los otros ángulos. ¿Cuál es? ¿Cómo convences a un amigo que no cree que tu elección sea correcta?



Figura 2.16

¿Por qué crees que decimos *rayos*, en vez de *línea*, en la descripción de ángulos congruentes? Si sustituimos *línea* por *rayo* en esta descripción, ¿podrías encontrar un contraejemplo? Esto es, ¿puedes encontrar un ejemplo de dos ángulos que se ajusten a la nueva descripción, pero que obviamente no tienen el mismo tamaño?

Comparando ángulos poniendo uno encima del otro es una idea simple y clara, pero no siempre es práctica. La esquina de un edificio, la cima de un techo y un interruptor en las vías de un ferrocarril son sólo algunos de los muchos, muchos casos de ángulos que no se pueden trazar o detectar y sobreponer. Para comparar ángulos como esos, necesitamos una manera para medirlos.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Identificar y construir ángulos congruentes de varias maneras

Medir ángulos en diferentes maneras usando grados y pendientes

Describir, construir y medir ángulos en términos de rotación.

Términos

La palabra *ángulo* viene de la palabra *angulus* la que significa esquina.

Términos

El prefijo *sobre-* significa *por arriba* o *sobre*. El verbo *imponer* significa *poner*. Así que *sobreimponer* significa poner arriba.

Pero, ¿qué debemos medir? Para comparar los ángulos, la cosa importante a medir es cuán rápido los rayos de los lados de los ángulos se divergen (separarse el uno del otro). Por ejemplo, imagina dos ratones caminando a lo largo de la vía (interior) hacia fuera de los vértices del interruptor de un ferrocarril. ¿Cuán rápido se alejan el uno del otro?

Realmente los ferrocarriles miden los ángulos de sus interruptores de esta manera. Ellos no usan ratones, por supuesto. Ellos miden la distancia, digamos y entre los rieles interiores en algún punto, luego miden la distancia, digamos x , de ese lugar al vértice del interruptor. La proporción $\frac{x}{y}$ es llamada

el *número* del interruptor. Es la cantidad de pies de los rieles *para cada pie de separación*, asumiendo que los rieles se mantienen corriendo rectos hacia fuera de cada desviación en cada dirección. Por ejemplo, un interruptor #12 es un ángulo que provee 1 pie de separación para cada 12 pies de los rieles. El diagrama en la Figura 2.17 muestra cómo se determina el tamaño del interruptor. En ésta, el interruptor se llama “desviación” porque viene del modelo de un libro de transportación por vía férrea. Los interruptores de las vías son llamados desviaciones por los operadores de las mismas, para que puedan distinguirlos de los interruptores eléctricos.

PICTURE

Turnout (frog) = desviación (rana)

Size = tamaño

X units = unidades x

Y units = unidades y

Example = ejemplo

So, this would be a no. 4 turnout. = Así, que esto sería una desviación Núm. 4.

Determining turnout size = determinando el tamaño de la desviación

De “Practical Guide to HO Model Railroading” por la revista Model Railroader. Derechos reservados © 1986 por la Kambach Publishing Company. Reproducido con permiso.

Figura 2.17

El ferrocarril de Moose Head Lake quiere colocar un nuevo riel cerca del terminal oriental. Ellos quieren un riel lateral para que corra paralelo a la línea principal, pero a 20 pies de distancia, para que pase por un lado de la plataforma de carga.

1. Si ellos usan un interruptor #12, ¿cuán lejos estará del vértice del interruptor hasta que los rieles internos estén a 20 pies de separación?

Este interruptor está en un riel principal para trenes expresos. Este ferrocarril, al igual muchos otros, usa el número de un interruptor como guía para la velocidad máxima segura del tren a través de ese interruptor – duplica el número del interruptor, en millas por hora. Esto significa que la velocidad de seguridad máxima del ferrocarril en un interruptor #12 es solamente 24 MPH. Ellos quisieran que los interruptores manejaran los ferrocarriles de manera segura a unas 40 MPH.

2. ¿Qué número de interruptor necesitan?
3. ¿Cuán lejos estaría del vértice del interruptor hasta que los rieles internos estén a 20 pies de separación?

Los inspectores dicen que la distancia del final de la plataforma al vértice del interruptor no puede exceder 360 pies.

4. ¿Cuál es el interruptor más grande que pueden usar?
5. ¿Cuál es la velocidad máxima que este ferrocarril puede ir sobre este interruptor?

Usando una proporción para medir el índice de separación entre líneas debe de sonarte familiar. Eso es de lo que se trata la *pendiente*. La pendiente de una rampa de carga en la Fuzzy Friends Toys Co. construida anteriormente en el libro **MATH Connections** mide su altura en relación a la distancia horizontal de su parte baja. Esta proporción de excedente de altura mide cuán rápido la línea de la rampa se desvía del nivel del estacionamiento, el eje horizontal.



PICTURE

La Figura 2.18 es un diagrama de la rampa de carga. Es una rampa recta que se eleva 4 pies y tiene una longitud horizontal de 32 pies. Los segmentos de líneas verticales son los ocho sostenedores de la rampa. Cada par ordenado te deja saber la localización y la longitud del apoyo. El primer número es la distancia horizontal del extremo izquierdo de la rampa; el segundo número es la longitud vertical. Si el diagrama de la rampa se corta en cualquiera de estos ocho segmentos verticales, tendrías un triángulo rectángulo.

1. ¿Son todos los triángulos similares? Justifica tu respuesta.
2. ¿Qué tiene que ver esto con la pendiente de la línea de la rampa?



Figura 2.18

La pendiente de la línea en un sistema de coordenadas es una medida que el ángulo forma con el eje horizontal. Podemos tomar prestada esa idea para medir ángulos, estén o no en un sistema de coordenadas. Podemos escoger un punto en un rayo de un ángulo, medir la distancia de ese punto al vértice y medir también la distancia perpendicular de ese punto al otro rayo. La proporción de esa distancia perpendicular dividida por la distancia al vértice será la misma, sin importar el punto que escojas. Eso hace de la proporción una buena medida del tamaño del ángulo; lo llamaremos **la medida de la pendiente** del ángulo.

Por ejemplo, para encontrar la medida de la pendiente del ángulo hecho por la rampa y el suelo en la Figura 2.18, podemos comenzar por escoger un punto P en el suelo debajo de la rampa. Si P es el punto 16 pies a la derecha del vértice, por ejemplo, entonces la medida de la pendiente de este ángulo es

$$\frac{\text{distancia perpendicular de } P \text{ a la rampa}}{\text{distancia de } P \text{ al vértice}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

He aquí otro ejemplo. Este se refiere a la Figura 2.19. Para encontrar la medida de la pendiente aproximada del $\angle AVB$, podemos usar una regla para medir los segmentos AV y AB . Ahora, AV tiene aproximadamente 3 pulgadas de longitud y AB tiene aproximadamente 0.5 pulgadas de longitud, así que

$$\text{la medida aproximada de la pendiente del } \angle AVB = \frac{AB}{AV} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}$$

Decimos aproximadamente porque la respuesta depende de la medida con la regla, la cual es siempre sólo una aproximación de la longitud actual.

Estas preguntas se refieren a la Figura 2.19:

1. Usa una regla para encontrar las medidas aproximadas de la pendiente del $\angle AVC$, del $\angle AVD$ y del $\angle AVE$.
2. Encuentra las medidas aproximadas de la pendiente del $\angle BVC$ y del $\angle DVE$. ¡Cuidado! ¿Qué tienes que medir? Mide cuidadosamente.
3. ¿Cómo están relacionadas las medidas del $\angle AVD$ y del $\angle AVE$?
4. Cuando añades las medidas de las pendientes del $\angle AVD$ y del $\angle DVE$, ¿consigues la medida de la pendiente del $\angle AVE$? ¿Crees que deberías? ¿Por qué sí o por qué no?



Figura 2.19

La medida de la pendiente de un ángulo es muy parecida a la manera en que los ferrocarriles miden los interruptores, pero no del todo igual. ¿Cuál es la diferencia? Observa cuidadosamente las Figuras 2.17 y 2.19.

Hay veces cuando la pendiente es útil para medir ángulos, pero sólo aplica fácilmente a los ángulos más pequeños que un ángulo recto. También, como habrás notado, la medida de la pendiente no se comporta muy bien con respecto a la suma y la resta. Necesitamos encontrar una mejor manera de medir ángulos.

Anteriormente en el capítulo 1, viste que cualquier sistema de medida comienza escogiendo una *unidad de medida*. Entonces todo se mide en términos de esa unidad. ¿Qué debemos escoger como unidad de medida para los ángulos?

Encuentra dos unidades diferentes para medir ángulos que nadie en tu clase haya escuchado antes. Entonces decide cuál crees es mejor. Provee razones que apoyen tu opinión.

Para medir ángulos, una unidad de medida que podríamos escoger es un ángulo recto. Los ángulos rectos son fáciles de hacer, así que no habría confusión acerca de cuán grande es la unidad. Pero un ángulo recto es mayor que muchos ángulos que podríamos medir; debemos de hacer más pequeña la unidad. ¿Qué tal usar alguna fracción de un ángulo recto como la unidad? Eso es exactamente lo que la Academia Francesa de Ciencias comenzó a hacer en el 1791, cuando estaban desarrollando el sistema métrico. El sistema métrico se basó en potencias de 10, así que pensaron en hacer una centésima de un ángulo recto la unidad de medida angular. Ellos llamaron a esta unidad un *grado*. Por lo tanto, un ángulo recto sería un ángulo de 100 grados; doblando un ángulo recto por la mitad, conseguiríamos dos ángulos de 50 grados; y así sucesivamente.

En cambio, la Academia Francesa decidió medir los ángulos con una unidad diferente –el *radián*. Más adelante veremos más sobre la medida del radián, luego de estudiar los círculos en el capítulo 4 del libro 2b. Verás entonces por qué el radián es una unidad útil para medir ángulos.

Por ahora, usaremos una unidad de medir ángulos que data de los babilonios, hace varios miles de años. Esa unidad es el *grado*. Los babilonios dividieron un ángulo recto en 90 partes iguales.¹ Cada una de estas 90 partes es un grado. Abreviamos “grado” con el mismo símbolo usado para los grados de temperatura, un pequeño círculo elevado. Entonces un ángulo recto es un ángulo de 90°; la mitad de un ángulo recto es un ángulo de 45°; y así sucesivamente. La Figura 2.20 te muestra el tamaño de un grado.

¹ Por razones relacionadas a la astronomía, su calendario, y su sistema de conteo, ellos dividieron los cuatro ángulos rectos producidos por dos líneas perpendiculares a un total de 360 partes iguales.

Un ángulo de 15° , medido en pasos de 1° .

Figura 2.20

La Figura 2.21 muestra diez ángulos. Estima en grados la medida de cada uno. Mira a ver si puedes mantenerte dentro de los 5° del tamaño exacto.

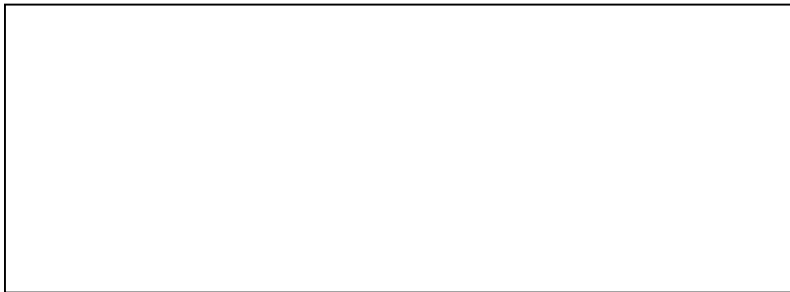


Figura 2.21

Frases a conocer: Las medidas de algunos de los ángulos en la Figura 2.21 son menores que las de un ángulo recto. Tales ángulos son llamados **ángulos agudos**. Los ángulos que miden más que un ángulo recto, pero menos de dos, son llamados **ángulos obtusos**.

1. **¿Cuáles de los ángulos en la Figura 2.21 son agudos? ¿Cuáles son obtusos?**
2. **Replantea las definiciones de los ángulos *agudos* y *obtusos* en términos de grados.**
3. **He aquí otras medidas de ángulos. ¿Cuál de estos ángulos son agudos? ¿Cuáles son obtusos?**

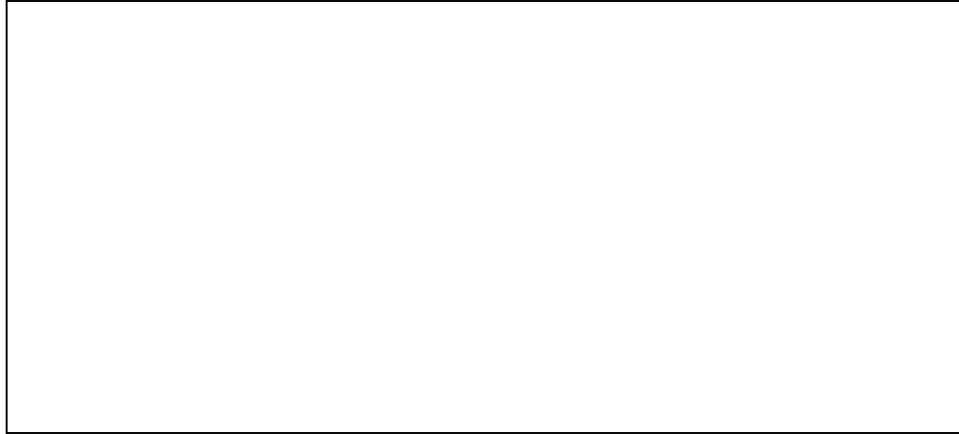
Insert numbers and letters

¿Cómo describirías un ángulo exacto de 180° ? ¿Cómo piensas se debería llamar? ¿Es realmente un ángulo? ¿Por qué sí o por qué no?

Términos

Las palabras *agudo* y *obtuso* son derivadas del latín para afilado y sin filo, respectivamente.

Para verificar los estimados de los tamaños de los ángulos en la Figura 2.21, necesitamos medir los ángulos. La herramienta más simple para medir un ángulo es un *transportador*. La Figura 2.22 muestra un dibujo de un transportador. Su forma básica es un semicírculo descansando en una base recta. El semicírculo está dividido en 180 arcos iguales (pequeños), cada uno representando 1 grado. Para medir un ángulo, ubica el centro de la base en el vértice y alinea un lado del ángulo con la línea de la base. El lugar en el cual el otro lado del ángulo cruza el semicírculo te dice la medida del ángulo en grados.



Vertex = Vértice

Midiendo un ángulo de 135° y un ángulo de 45° con un transportador.

Figura 2.22

Muchos transportadores enumeran la escala en grados de ambos lados, así que un ángulo se puede medir en cualquier dirección. Así que, un lado del ángulo se puede alinear con la línea de la base a la izquierda o a la derecha del vértice. En la Figura 2.22, por ejemplo, el arco de números interiores es usado para medir ángulos con el lado de la base a la derecha, mientras que la parte exterior del arco de números mide los ángulos con la base hacia la izquierda. A veces decimos que los ángulos son “abiertos” a la derecha o la izquierda, dependiendo en este alineamiento con la base. Por lo tanto, el rayo que va hacia arriba a la derecha (a través de B) es un lado de un ángulo de 45° , $\angle BVC$, que abre hacia la derecha: es también el lado de un ángulo de 135° , $\angle AVB$ que abre hacia la izquierda.

1. Usa un transportador para medir, al grado más cercano, los diez ángulos mostrados en la Figura 2.21. Compara tus medidas con los estimados anteriores. ¿Te mantuviste cada vez dentro de los 5°?

(Pista: Si no tienes disponible un transportador, usa un papel de trazar para copiar los ángulos de la Figura 2.21 y colócalos uno por uno encima del transportador de la Figura 2.22. Quizás tengas que extender un poco los lados de los ángulos para que esto funcione.)

2. Usa un transportador para dibujar un ángulo para cada uno de estos tamaños:

| |
|----------------|
| Insert numbers |
|----------------|

Esta pregunta también se puede contestar usando un papel de trazar y la Figura 2.22.

En inglés, el verbo “*protract*” (prolongar) significa “dibujar hacia fuera o estirar hacia fuera.” Explica por qué el transportador es un buen nombre para la herramienta que se muestra en la Figura 2.22.

Algunas veces es útil pensar en los ángulos en términos de rotación. Esto es, si pensamos en los lados de un ángulo como dos flechas que giran sobre el mismo punto final (como las manecillas del reloj), entonces el tamaño de un ángulo mide cuán lejos una flecha ha rotado alejándose de la otra. Es usual considerar las rotaciones en contra de las manecillas del reloj como positiva y la rotación a favor de las manecillas del reloj como negativa.

Desde este punto de vista, no hay razón para dejar de medir los ángulos a 180°. Podemos medir alrededor del círculo en contra de las manecillas del reloj, obteniendo ángulos más y más grandes hasta llegar a donde comenzamos. De hecho, esto es lo que los babilonios tenían en mente cuando definieron el grado. Dividieron el círculo entero en 360 partes iguales. Rotando a favor de las manecillas del reloj, podemos obtener ángulos con medidas negativas. Puede que pienses en medir dichos ángulos usando un transportador doble, como en la Figura 2.23.

Frases a conocer: Un ángulo con una medida de más de 180° pero menos de 360° se llama un **ángulo reflejo**.

Términos

La raíz *flex* se deriva de la palabra del latín para doblar, y el prefijo *re-* significa regreso. Entonces un ángulo reflejo es uno que se dobla hacia atrás.



Figura 2.23

Estas preguntas hacen referencia a la Figura 2.23. Piensa en el rayo AC como el lado de comienzo de cada ángulo.

1. ¿Cuál es la medida del ángulo en contra de las manecillas del reloj con otro lado AB ?
2. ¿Cuál es la medida del ángulo en contra de las manecillas del reloj con otro lado AD ?
3. ¿Cuál es la medida del ángulo a favor de las manecillas del reloj con otro lado AD ?
4. ¿Cuál es la medida del ángulo a favor de las manecillas del reloj con otro lado AB ?
5. ¿Cuál es la medida del ángulo en contra de las manecillas del reloj con otro lado AC ?
6. ¿Cuál es la medida del ángulo a favor de las manecillas del reloj con otro lado AC ?
7. ¿Cuál de los seis ángulos descritos son ángulos reflejos?
8. ¿Que números se deben utilizar para rotular las siguientes tres marcas de las marcas de funciones más largas más allá del punto D en una dirección en contra de las manecillas del reloj?
9. ¿Que números se deben utilizar para rotular las siguientes tres marcas de las almohadillas (#) más largas más allá del punto D en la dirección a favor de las manecillas del reloj?

A continuación un repaso de la terminología de los ángulos usando las medidas de grados.

- Un ángulo que mide menos de 90° , pero más de 0° , es un **ángulo agudo**.
- Un ángulo que mide 90° es un **ángulo recto**.
- Un ángulo que mide más de 90° , pero menos de 180° , es un **ángulo obtuso**.
- Un ángulo que mide 180° es un **ángulo llano**.
- Un ángulo que mide más de 180° , pero menos de 360° , es un **ángulo reflejo**.

Conjunto de ejercicios: 2.3

1. (a) Copia la Figura 2.24a, añádele letras y nombra todos los ángulos. ¿Cuántos ángulos encuentras?
(b) Copia la Figura 2.24b, añádele letras y nombra todos los ángulos. ¿Cuántos ángulos encuentras?
(c) Copia la Figura 2.24c, añádele letras y nombra todos los ángulos. ¿Cuántos ángulos encuentras?
(d) Si fueras a copiar la Figura 2.24d, añadirle letras, y nombrar todos los ángulos, ¿cuántos ángulos piensas que encontrarías?
(e) ¿Cuál sería el próximo paso en este patrón?
(f) Trata de describir como trabaja este patrón en general.

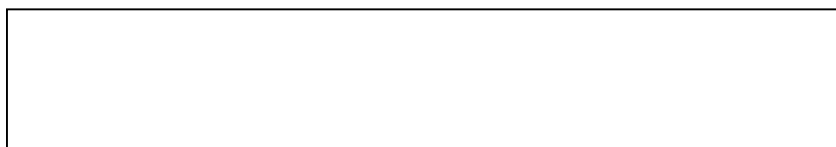


Figura 2.24

2. Traza la Figura 2.24b en un pedazo de papel de repostería. Extiende las cuatro líneas para que cada una sea por lo menos tres pulgadas de largo. Marca el vértice V y rotula los otros extremos de los segmentos P , Q , R y S en el orden de las manecillas del reloj, comenzando desde arriba.
 - (a) Hay cinco ángulos agudos en esta figura. Enuméralos en una columna, usando las tres letras de su nombre. Entonces mide cada uno con un transportador y escribe la medida de sus grados al lado de sus nombres. Redondéalo al grado más cercano.

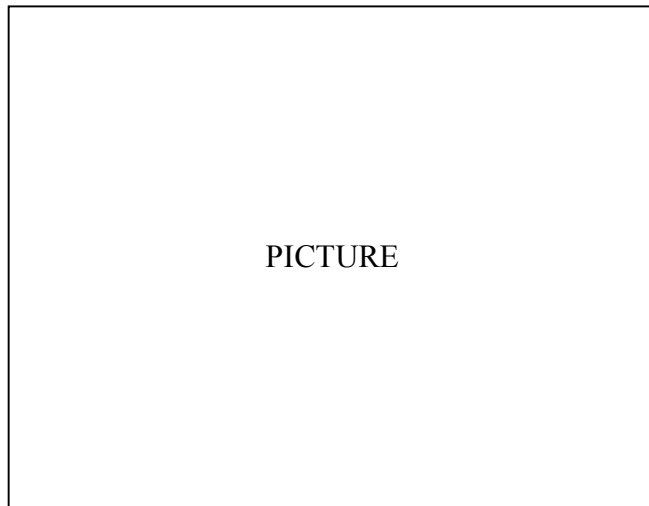
- (b) Usando una regla, encuentra la medida de la pendiente de cada uno de los cinco ángulos, y escríbelo al lado de la medida del grado. Redondéalo a dos lugares decimales.
- (c) ¿Cómo se relacionan el $\angle QVR$ y el $\angle RVS$ al $\angle QVS$? ¿Cómo están relacionadas sus medidas en grados? ¿Cómo están relacionadas las medidas de las pendientes?
- (d) ¿Qué ángulo se forma al juntar el $\angle PVQ$, el $\angle QVR$ y el $\angle RVS$? ¿Cuál es la suma de las medidas de sus grados? ¿Obtienes resultados semejantes cuando añades las medidas de las pendientes? ¿Qué quieres decir con similar?
- (e) Escribe un párrafo comparando la medida en grados y la medida de la pendiente. ¿Cuál sistema es más fácil para usar? ¿Cuál se maneja mejor en términos de aritmética? ¿Cuál te gusta más? Da razones para apoyar tus opiniones.

3. Usando sólo un lápiz y una regla, dibuja el mejor estimado de un ángulo para cada uno de los siguientes tamaños. Trata de mantenerte entre 5° del tamaño correcto. Cuando hayas terminado, mídelos con un transportador para ver cuán cerca estuviste. ¿Cuántos estuvieron entre 5° ? ¿Cuántos entre 3° ? ¿Conseguiste alguno entre 1° ?



4. Asume que nos estamos refiriendo a un reloj estándar de 12 horas y que las respuestas a éstas preguntas no son ángulos reflejos.
- (a) Cuando un reloj lee las 3 p.m., ¿cuál es la medida del ángulo entre las manecillas de la hora y la de los minutos?
 - (b) Cuando un reloj lee las 5 p.m., ¿cuál es la medida del ángulo entre las manecillas de la hora y la de los minutos?
 - (c) Cuando un reloj lee las 6:30 p.m., ¿cuál es la medida del ángulo entre las manecillas de la hora y la de los minutos? Explica tu respuesta.
 - (d) Cuando un reloj lee las 9:30 p.m., ¿cuál es la medida del ángulo entre las manecillas de la hora y la de los minutos? Explica tu respuesta.
 - (e) ¿Es una función el proceso de encontrar el ángulo (no reflejo) entre las manecillas del reloj? Si es así, ¿cuál es el dominio y el rango? Si no, ¿por qué no?

5. Asume aquí que nos estamos refiriendo a un reloj estándar de 12 horas.
- (a) Si el ángulo entre la manecilla de la hora y la de los minutos del reloj es 180° , ¿qué hora es? ¿Podría haber más de una respuesta correcta a esta pregunta? ¿Podría haber más de dos? Explica tu respuesta.
 - (b) Si el ángulo entre la manecilla de la hora y la de los minutos del reloj es 120° , ¿qué hora es? ¿Podría haber más de una respuesta correcta a esta pregunta? ¿Podría haber más de dos? Explica tu respuesta.
 - (c) ¿Es una función el proceso de encontrar la hora del ángulo (no reflejo) en las manecillas del reloj? Este proceso es lo contrario de el descrito en la pregunta 4(e). Si es así, ¿cuál es el dominio y el rango? Si no, ¿por qué no?
6. (a) Dibuja cinco triángulos diferentes. Para cada uno, mide sus ángulos y añade los tres números que consigas. ¿Están tus sumas relacionadas de alguna manera? Si es así, ¿cómo? Compara los resultados con aquellas de tus compañeros de clase.



- (b) Dibuja cinco cuadriláteros diferentes (polígonos de cuatro lados). Para cada uno, mide sus ángulos y añade los cuatro números que consigas. ¿Están tus cinco sumas relacionadas de alguna manera? Si es así, ¿cómo? Compara tus resultados con aquellos de tus compañeros de clase.
- (c) ¿Cuál debe ser el próximo conjunto de preguntas en esta secuencia? Respóndelas.
- (d) ¿Puedes ver aquí algún tipo de patrón? Si es así, ¿cuál?
7. (a) El transportador real usado para hacer la Figura 2.22 (en la pág. 140) era muy grande para ser copiado a tamaño completo, así que lo reducimos. ¿Qué factor de escala utilizamos (aproximadamente)? ¿Cómo lo sabes?
- (b) Si medimos los ángulos de la Figura 2.21 usando un transportador real en vez del que tenemos en la Figura 2.22, ¿hubiéramos obtenido respuestas diferentes? Si dices que sí, describe una manera de convertir un conjunto de respuestas a la otra. Si dices que no, explica por qué las medidas no deben de cambiar.