

2.4 Encontrando el tamaño de los ángulos eficientemente

En la sección 2.3 hablamos sobre dos maneras de medir ángulos – por la pendiente y por grados. He aquí un ejemplo de construcción de vivienda que muestra como están relacionados.

33-11. Un ejemplo de un plano de soporte pegado con clavos para un soporte de armadura de cubierta con 4 pulgadas: pendiente de 12. Este es uno de los diseños disponibles de la American Plywood Association.

SPAN/2 = ANCHURA/2

Nails or staples = Clavos o grapas

Beveled heel gusset = Escuadra de talón biselado

Todas las placas de refuerzos de madera contrachapada están en ambos lados de la armadura

Face = Fachada

Grain = Grano

Square heel gusset = Escuadra de talón cuadrado

De Carpentry and Building Construction, 5ta. Edición, página 483, por John L. Feirer, Gilbert R. Hutchings y Mark D. Feirer. Derechos reservados © 1997 por Glencoe/McGraw-Hill. Reproducido con permiso.

Figura 2.25

La Figura 2.25 muestra un diagrama de una armadura de cubierta con pendolón –un tipo de soporte de techo. El diagrama contiene la mayoría de la información necesaria para construir esta armadura una vez sepas la anchura de la vivienda. Te dice, particularmente, que la pendiente del techo es de 4:12. Esto es, el techo se eleva 4 pulgadas por cada 12 pulgadas de anchura del lado al centro. Esto es significado de



la parte superior del diagrama.

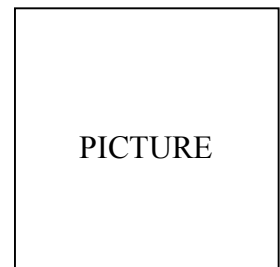
Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Usar las funciones de TAN y TAN⁻¹ de la calculadora para convertir las medidas de los ángulos de grados a pendientes, y viceversa.

Explicar el significado de los términos ángulos *suplementarios* y *verticales*.

Aplicar las propiedades definitorias de los ángulos suplementarios y verticales en varios escenarios.



Si la casa tiene 30 pies de ancho (medida de las paredes de afuera), ¿aproximadamente cuán largo es el pilar vertical del centro? Lleva tu contestación al pie más cercano. En una construcción real, tendrías que dejar unas pulgadas de margen para el ancho de las vigas. A lo largo de la viga inclinada más alta, ¿aproximadamente cuán lejos está de la cima a la pared de afuera? No incluyas el alero (“O” en la Figura 2.25). Explica cómo encontraste tus respuestas.

La parte inferior de la Figura 2.25 muestra la forma de las *escuadras*. Estas son los soportes de la madera contrachapada que van a los lados de cada una de las juntas. Como puedes ver, la esquina de arriba de cada escuadra debe ser cortada en un ángulo para igualarla a la pendiente del techo. Con frecuencia las escuadras se cortan de hojas de madera contrachapada con anterioridad a ensamblar las armaduras, usando un serrucho de mesa o una sierra de brazo radial en un taller de carpintería.

He aquí el problema: la configuración del serrucho de mesa para cortar ángulos está marcada en grados, no por pendiente. Necesitas saber la configuración en grados que le corresponde a la pendiente del techo. ¡Pero está bien –tu calculadora te puede dar el valor en grados para cualquier pendiente! Sólo tienes que saber cómo preguntar.

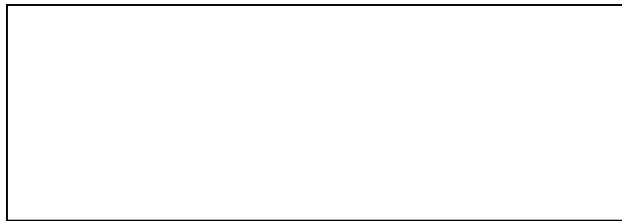
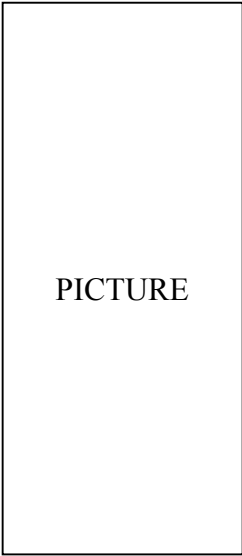


Figura 2.26

La correspondencia entre la medida en grados de un ángulo y su medida de la pendiente es una función. Cada medida en grados tiene exactamente un valor de pendiente. Y si nos restringimos a ángulos que tienen menos de 90° (como lo haríamos al construir un techo), lo opuesto también es cierto. Cada medida de una pendiente tiene exactamente un valor en grados.

- El proceso que cambia la medida de grados de un ángulo a la medida de su pendiente se llama **función tangente**; la tecla en la calculadora está marcada TAN.
- El proceso contrario, el cual cambia la medida de la pendiente a medidas en grados, se llama **función de tangente inversa**; la tecla en la calculadora está marcada TAN^{-1} .

En general, una función que invierte el proceso correspondiente de otra función se llama la **inversa** de esa otra función. Más adelante verás cómo la trigonometría nos da una explicación de cómo la calculadora puede obtener cada una de estas medidas de la otra. También verás por qué se utiliza el término *tangente* para esta función. Por ahora, nos concentraremos en las maneras en que se puede utilizar esta herramienta tan útil.

Para hacer la escuadra mostrada en la Figura 2.26 con un serrucho de mesa, necesitamos saber la medida del $\angle V$ en grados. Para encontrar esto con tu calculadora, contesta las siguientes preguntas. Antes de comenzar, asegúrate que tu calculadora esté en el modo de grados. Esto significa que la calculadora está usando el grado como su unidad de medir ángulos.

1. **¿Cuál es la medida de la pendiente del $\angle V$?**
2. **Antes de calcular la medida en grados del $\angle V$, estímalo relacionando el dibujo a tu idea de lo que es un ángulo recto, como la siguiente manera:**
 - (a) **¿Es el $\angle V$ más o menos que la mitad de un ángulo recto?**
 - (b) **¿Piensas que el $\angle V$ es más o menos que un cuarto de un ángulo recto?**
 - (c) **¿Cuál es tu mejor estimado de la medida de los grados del $\angle V$?**
3. **¿Qué función de la calculadora convierte pendiente a medida en grados? Úsala para encontrar la medida en grados del $\angle V$ a la décima más cercana de un grado. ¿Cómo se compara tu respuesta a tu estimado? Si hay una diferencia de más de 10° , ¿en cuál de las respuestas confías más, el estimado o el cómputo?**
4. **¿Qué función de la calculadora convierte medida en grados a pendiente? Úsala para verificar tu respuesta. ¿Conseguiste la pendiente original? Si no, ¿qué crees se hizo mal?**

1. **Dibuja una línea horizontal en un pedazo de papel. Luego usa un transportador para dibujar una línea que genere un ángulo de 30° con tu primera línea.**
2. **Usa tu calculadora para encontrar la pendiente de la segunda línea relativa a la línea horizontal. Explica cómo haces esto.**
3. **¿Cómo puedes verificar esta respuesta midiendo tu dibujo? Hazlo. ¿Están de acuerdo tus resultados? Si no, ¿puedes explicar qué está incorrecto?**
4. **Dibuja un ángulo de 30° en tu calculadora diagramando una ecuación apropiada. ¿Parece el ángulo de tu gráfica ser del mismo tamaño del que dibujaste? Si no, ¿puedes explicar qué está incorrecto y cómo arreglarlo?**
5. **¿Es la pendiente hecha por un ángulo de 60° el doble de un ángulo de 30° ? Verifícalo usando cualquier método que desees.**
6. **Piensa en una pregunta relacionada a este ejercicio que te hubiera gustado contestar.**

Con frecuencia los ángulos ocurren en grupos relacionados, para que así puedas encontrar el tamaño de dos o más ángulos al medir sólo uno de ellos. ¡He aquí un caso donde la medida de un ángulo determina la medida de cuatro ángulos! Cuando dibujas dos líneas cruzadas para hacer un ángulo, en realidad estás haciendo cuatro ángulos. Observa la Figura 2.27. La medida de cada par de estos ángulos están relacionadas en una o dos formas especiales. ¿Puedes verlo?

Escoge cualquiera dos de los cuatro ángulos enumerados mostrados en la Figura 2.27. ¿De qué manera están relacionadas sus medidas? Da una razón para justificar tu respuesta.

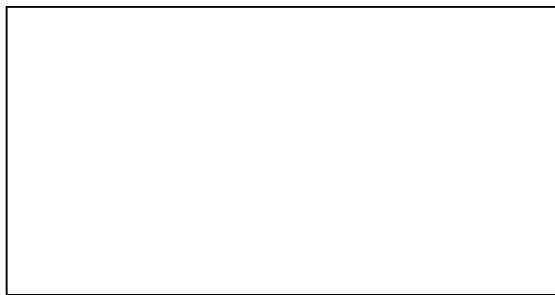


Figura 2.27

Frases a conocer: Dos ángulos que son formados por dos líneas intersecadas y que no tienen un lado en común se llaman **ángulos verticales**.

¿Cuántos pares de ángulos verticales puedes encontrar en la Figura 2.27? ¿Cuáles son?

Frases a conocer: Dos ángulos con medidas que suman 180° se llaman **ángulos suplementarios**.

¿Cuántos pares de ángulos suplementarios puedes encontrar en la Figura 2.27? ¿Cuáles son?

Cada uno de estos pares especiales de ángulos tiene una propiedad útil.

- Los ángulos suplementarios son colocados uno al lado de otro, para que sus vértices y uno sólo de sus lados coincidan para formar un ángulo recto (una línea recta).
- Las medidas de los ángulos verticales son iguales.

Sabemos que la primera afirmación es cierta porque la medida de un ángulo recto es 180° . Podemos abordar la segunda afirmación de muchas maneras. Una manera simple es haciendo un experimento. Dibuja dos líneas cruzándose al azar en una hoja de papel; luego dobla el papel a través del punto de intersección para que los rayos de las dos líneas diferentes coincidan. Verás que los ángulos verticales son congruentes; se parecen perfectamente.

He aquí otra manera de ver que las medidas de los ángulos verticales son iguales. Es un poco más formal, pero es más seguro por que no depende en un par de líneas en particular o en tu destreza de doblar un papel.

Haz cualquier par de ángulos verticales –digamos $\angle 1$ y $\angle 3$, como en la Figura 2.27. Fíjate que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios y los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ son también suplementarios. Eso es,

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \text{ y } \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

Esto significa que las sumas se igualan una a la otra:

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$$

Al restar el $\angle 2$ de los dos lados de la ecuación, obtenemos

$$\angle 1 = \angle 3$$

Eso es, las medidas de los ángulos verticales deben de ser iguales.

1. ¿Cuántos pares de ángulos suplementarios puedes encontrar en la Figura 2.28? ¿Cuáles son? Justifica tu respuesta.
2. ¿Cuántos pares de ángulos verticales puedes encontrar en la Figura 2.28? ¿Cuáles son? Justifica tu respuesta.
3. Haz un dibujo de ángulos verticales que sean suplementarios. ¿Qué otras propiedades *debe* tener ese ángulo? Justifica tu respuesta.

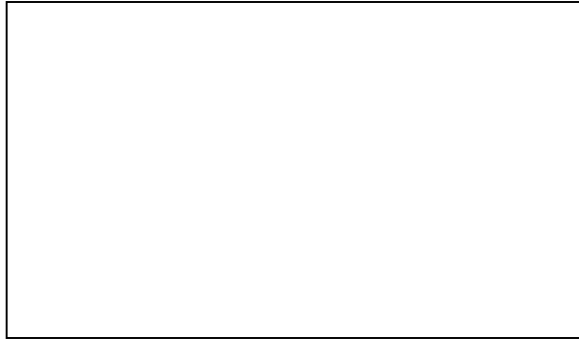


Figura 2.28

Conjunto de ejercicios: 2.4

1. En esta sección aprendiste cómo usar las funciones TAN y TAN^{-1} de tu calculadora para convertir las medidas de un ángulo de grados a pendiente y viceversa. Usa tu calculadora para hacer las siguientes conversiones. Redondea las respuestas a dos lugares decimales.

(a) Convierte de grados a medidas de pendientes:

(b) Convierte de medidas de pendientes a grados:

2. Contesta las siguientes preguntas *sin* usar tu calculadora. Escoge el ángulo más grande en cada uno de los siguientes pares. Da una razón para justificar tu elección.
- (a) El $\angle A = 42^\circ$; la medida de la pendiente del $\angle B$ es $\frac{7}{6}$
 - (b) El $\angle C = 53^\circ$; la medida de la pendiente del $\angle D$ es 0.985
 - (c) El $\angle E = 100^\circ$; la medida de la pendiente del $\angle F$ es 250
 - (d) El $\angle G$ es un ángulo recto; la medida de la pendiente del $\angle H$ es 9000.09
 - (e) El $\angle J = 47^\circ$; la medida de la pendiente del $\angle K$ es $\frac{7}{3}$
 - (f) El $\angle L = 73^\circ$; el $\angle M$ es su suplementario
 - (g) El $\angle N = 98^\circ$; el $\angle M$ es su suplementario
 - (h) La medida de la pendiente del $\angle Q$ es 98; el $\angle R$ es su suplementario
3. El Sr. Santos está pintando su casa. Él necesita poder recostar la parte superior escalera del borde del techo, el cual está a 18 pies del suelo. Su escalera, extendida completamente, mide solamente 20 pies de largo, pero tiene esta advertencia:

No exceda un ángulo de 70° de elevación entre la escalera y el suelo.

- (a) ¿Por qué crees que la escalera tiene esta advertencia?
- (b) ¿Puede el Sr. Santos usar la escalera de manera segura si la recuesta al borde del techo? Explica usando un argumento matemático. (*Pista:* Dibuja un boceto. Usa el Teorema de Pitágoras. Piensa sobre la función TAN en tu calculadora.)
- (c) Si estuvieras preparando un informe para un grupo de investigación del consumidor, ¿cuál dirías tú que sería la altura máxima segura (a la pulgada más cercana) que puede alcanzar esta escalera de 20 pies? ¿Por qué?

Los problemas 4 y 5 tienen que ver con el reloj solar. El reloj solar es el artefacto de cronometraje más viejo de la civilización. No requiere ninguna pieza móvil, baterías (pilas), o electrónicos y –contrario a los relojes modernos– constantemente nos recuerda que el tiempo, como nosotros los humanos lo definimos, está basado en el movimiento de la Tierra en relación con el Sol. Según la Tierra gira en su eje, el Sol aparece en diferentes lugares en el cielo, causando que la sombra de un objeto inmóvil en la Tierra cambie. Este cambio es lo que marca las horas en un reloj solar.

Por más de 4,000 años, los relojes solares en muchas formas y tamaños han decorado patios y ciudades, inspirando a los usuarios con inscripciones como:

Carpe Diem! (*¡Aprovecha el día!*)

Tempos Fugit. (*El tiempo vuela.*)

Utere, Non Numera. (*Úsenlo, no lo cuenten.*)

Omnes Vulnerant, Última Necat. (*Cada una hiere, la última mata.*)

Una Ex His Erit Tibi Ultima (*Una de éstas será tu última.*)

Mach' es wie die sonnenuhr, zähl' die heiteren stunden nur. (*Haz como el reloj solar, sólo marca las horas brillantes.*)

Todas excepto una de estas citas están en su latín² original. ¿Cuál es la excepción? ¿En qué lenguaje está escrito?

¡La parte más sorprendente de los relojes solares es que siempre funcionan! Según cambian las estaciones, el Sol sube y se coloca a diferentes horas y toma un camino más alto o más bajo en el cielo. Los patrones de la sombra diaria están siempre cambiando. ¡Pero *cambian de una manera tan predecible* que se pueden usar para dictar el tiempo! Sólo tienes que hacer exactamente la forma triangular y ubicarla en su posición correcta, de la siguiente manera:

- Corta un triángulo (de madera o metal o cualquier cosa rígida) para que la medida de uno de sus ángulos sea exactamente la latitud del lugar donde te encuentras en la Tierra. ¿Sabes lo que la *latitud* significa? Si no, búscalo.
- Coloca el triángulo hacia arriba en una superficie plana en un lugar soleado, con su hipotenusa inclinada hacia arriba, lejos del vértice del ángulo-latitud y mirando hacia la Estrella del Norte.

¡Entonces la sombra proyectada por el borde del triángulo a una hora del día en particular estará en la misma línea de la superficie cada día del año! Suena como magia, pero es ciencia. Si estudias astronomía, verás por qué esto funciona de esta manera³. Los relojes solares como este tienen las horas marcadas como líneas en la superficie plana (horizontal).

² Recurso: René J. Rohr, *Sundials: History, Theory and Practice* (Toronto: University of Toronto Press, 1970).

³ Si no puedes esperar hasta entonces, puedes hecharle un vistazo a Albert E. Waugh, *Sundials, Their Theory and Construction* (New York: Dover Publications, 1973).

La pieza triangular de arriba es llamada un **gnomon**. Para que un reloj solar funcione correctamente, la forma y la posición de su gnomon deben estar exactamente correctas.

Términos

Gnomon es derivado de la palabra griega que significa uno que conoce.

4. (a) Hartford, Connecticut está localizado cerca de la latitud 42°N . El ángulo y la posición correcta para un gnomon allí se muestra en la Figura 2.29 como el $\angle BAC$. Calcula la altura de este gnomon para cada una de estas dimensiones horizontales (base):
- (i) 5 pulgs. (ii) 7 pulgs. (iii) 11 pulgs.

Redondea tus respuestas a la décima más cercana a una pulgada.

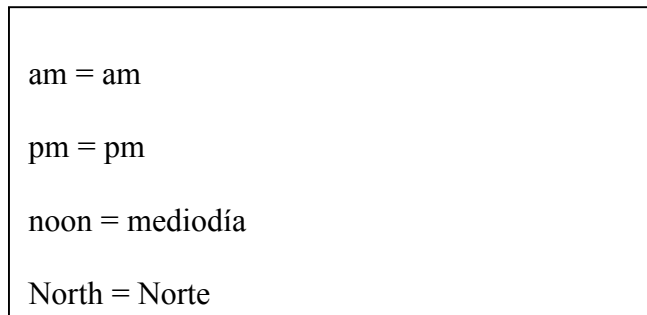
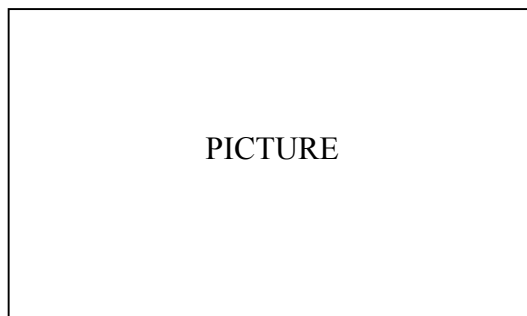


Figura 2.29

- (b) Usando una hoja de papel grueso o cartulina de $8.5'' \times 11''$, corta un gnomon que pueda funcionar para un reloj solar en Hartford.
- (c) Encuentra la latitud de tu pueblo (busca en los bordes de un mapa de carreteras) y haz un gnomon de reloj solar que funcione allí. Escoge el tamaño de base que quieras.
- (d) Repite la parte (a) de arriba para las localidades de Fairbanks, Alaska, en la latitud de 65°N y Miami, Florida, con una latitud de 25°N .



5. (a) La compañía Big Ben Sundial exporta relojes solares a ciudades grandes alrededor del mundo. Su modelo básico tiene un gnomon triangular con un lado horizontal de 24 cm. ¿Cuál es la altura apropiada para este gnomon en cada una de las siguientes ciudades? (¿Conoces el país de cada una?)

Atenas	Beijing	Berlín
Cairo	Calcuta	Lagos
Londres	Moscú	Ciudad de México
Ciudad de Panamá	París	Roma
San Juan	San Salvador	Singapur
Estocolmo	Tel Aviv	Tokio

Redondea tus respuestas al mm. más cercano. Necesitarás comenzar con un globo terráqueo, un atlas mundial, una enciclopedia o un buen mapa del hemisferio norte.

- (b) ¿Dónde, en la parte norte del mundo, hay gnomos precisos en forma de triángulos rectángulos *isósceles*? Localiza por lo menos una ciudad o pueblo en América del Norte donde esto sea cierto.
- (c) ¿Cómo se vería un gnomon correcto en el Ecuador? ¿Qué tal el Polo Norte?

