

2.5 Líneas paralelas y la suma del ángulo de un triángulo

En la sección 2.4 observaste algunas propiedades de ángulos formados por líneas intersecadas. Ahora veremos el caso de líneas que no se intersecan. Ellas no forman ángulos por sí mismas, por supuesto, pero los ángulos que se forman al cruzar dichas líneas con otra línea tienen algunas relaciones útiles. Comencemos con un recordatorio de hechos básicos que podrías ya conocer.

- En un plano, las líneas rectas que nunca se intersecan, sin importar cuán lejos se extiendan, se llaman **paralelas**.
- La distancia perpendicular entre dos líneas paralelas es la misma en todas partes, sin importar dónde lo verifiques.
- Si colocamos un sistema de coordenadas en un plano, las líneas paralelas siempre tendrán la misma pendiente.

La Figura 2.30(a) muestra una línea, t , que interseca dos líneas paralelas, formando ocho ángulos. ¿Cuál de estos ángulos piensas que son iguales? Da razones para apoyar tus respuestas.

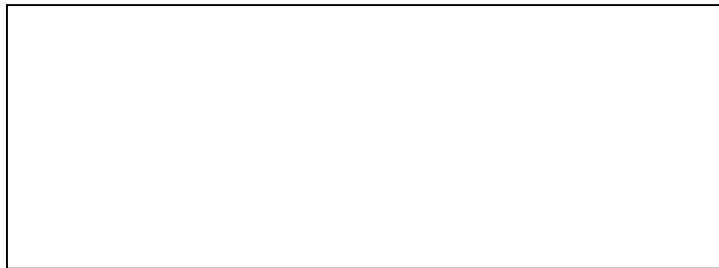


Figura 2.30

La situación mostrada en la Figura 2.30(a) es algunas veces descrita como “líneas paralelas cortadas por una *transversal*.” Una **transversal** es una línea recta que interseca dos o más líneas rectas en distintos puntos; t es la transversal en esta figura.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

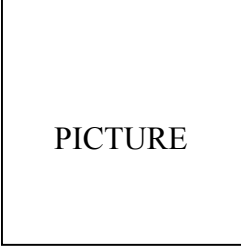
Explicar el significado de los términos *correspondiente*, *interior alterno*, y ángulos *complementarios*

Reconocer y aplicarás la igualdad de ángulos correspondientes y ángulos interior alternos en relación al paralelismo de las líneas

Usar en varios esquemas el hecho de que la suma del ángulo de cualquier triángulo es 180° .

Términos

Transversal está relacionado al verbo *atravesar*, que significa ir de un lado a otro. La ciudad Traverse está en la parte norte de Michigan. ¿Podrías averiguar por qué la llaman así?



La clave para entender las líneas paralelas cortadas por una transversal es observar que un ángulo en un punto de intersección debería tener la misma medida al ángulo en la misma posición relativa al otro punto de intersección. Por ejemplo, en la Figura 2.30(a), el $\angle 1$ y el $\angle 5$ deben de tener la misma medida. En la Figura 2.30 (b), el $\angle 1$ y el $\angle 5$ no tienen la misma medida porque las dos líneas no son paralelas. Médelos con un transportador para que te convenzas.

Una manera de convencerte a ti mismo de este hecho es hacer un dibujo en tu calculadora gráfica. Ajusta la ventana para incluir X del 1 al 10, Y de -5 al 5. Luego grafica las ecuaciones

$$y_1 = x - 3 \text{ y } y_2 = x - 6$$

El dibujo que obtienes debe parecerse a la Figura 2.30(a), con el eje de x como la transversal. La pendiente de cada una de las dos líneas paralelas mide el ángulo que hace con el eje de x . ¡Pero ambas líneas tienen la misma pendiente! ¿Cuál es? Así que son ángulos congruentes; tienen la misma medida.

Frase a conocer: Cuando dos líneas son cruzadas por una transversal, los dos ángulos que están en la misma posición relativa a los dos puntos de cruce son llamados **ángulos correspondientes**.

.....
Nombra los cuatro pares de ángulos correspondientes en la Figura 2.30(a). ¿Son los mismos pares de ángulos correspondientes en la Figura 2.30(b)? ¿Por qué sí o por qué no?

Uno de los usos de los ángulos correspondientes es ver si dos líneas son actualmente paralelas.

Dato a conocer: Dos líneas cruzadas por una transversal son paralelas *sí y solamente sí* las medidas de cualquier par de ángulos correspondientes son iguales.

.....
Frase a conocer: La frase *si y solamente si* significa que las dos afirmaciones que conectan son lógicamente equivalentes. Si una no es cierta, tampoco lo es la otra.

.....
Si sabemos que dos líneas son paralelas, entonces los ángulos correspondientes que se han formado por cualquier transversal *deben* ser iguales. En la Figura 2.30(a), las dos líneas sin marcar son paralelas, así que el $\angle 1 = \angle 5$, el $\angle 2 = \angle 6$, y así sucesivamente.

Por otra parte, si dos líneas cruzadas por una transversal tienen un par de ángulos correspondientes iguales, entonces las líneas *deben* ser paralelas. En la Figura 2.31(a), podemos verificar si las líneas son paralelas encontrando si los dos ángulos marcados (o cualquier otro par correspondiente) son iguales. En otras palabras, conociendo que los dos ángulos correspondientes tienen la misma medida garantiza que no importa cuán lejos se extiendan estas dos líneas en cualquier dirección, la distancia entre ellas se mantendrá igual.

corresponding angles = ángulos correspondientes
alternate interior angles = ángulos interiores alternos

Figura 2.31

La Figura 2.31(b) ilustra otro par de ángulos útiles que ocurren cuando dos líneas son cruzadas por una transversal.

Frase a conocer: Cuando dos líneas son cruzadas por una transversal, los dos ángulos con diferentes vértices que están entre las dos líneas y en lados opuestos de la transversal se llaman **ángulos interiores alternos**.

-
1. **Nombra todos los pares de ángulos interiores alternos en la Figura 2.30(a).**
 2. **¿Qué crees que son los *ángulos exteriores alternos*? Haz un boceto que ilustre tu respuesta. Entonces nombra por lo menos un par de ángulos exteriores alternos en la Figura 2.30(a).**

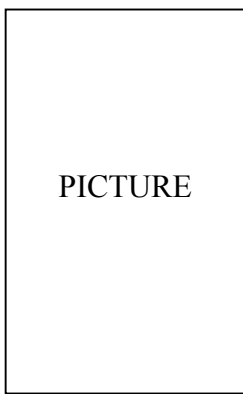
Los ángulos interiores alternos se pueden usar para determinar si dos líneas son realmente paralelas.

Dato a conocer: Dos líneas cruzadas por una transversal son paralelas *si y solamente si* las medidas de cualquier par de ángulos interiores alternos son iguales.

Las líneas paralelas en la Figura 2.30(a) garantizan que el $\angle 1 = \angle 7$ y el $\angle 4 = \angle 6$. En la Figura 2.31(b), podemos verificar si las líneas son paralelas al encontrar si dos de los ángulos marcados son iguales.

¿Cómo la afirmación que relaciona los ángulos interiores alternos a las paralelas puede ser derivada de la afirmación que relaciona los ángulos correspondientes a los paralelos?

Juntemos lo que sabemos hasta ahora sobre líneas paralelas y los ángulos formados por una transversal. Para cualesquiera dos líneas en un plano, las siguientes afirmaciones son *equivalentes*. Esto es, si sabemos que *cualquiera* de ellas es cierta, entonces sabemos que *todas* son ciertas.



1. Las líneas son paralelas.
2. Las líneas nunca se encuentran, no importa cuán lejos se extiendan.
3. La distancia entre las líneas es la misma en todos lados.
4. Para algunas transversales, dos ángulos correspondientes son iguales.
5. Para cualquier transversal, todos los pares de ángulos correspondientes son iguales.
6. Para algunas transversales, dos ángulos interiores alternos son iguales.
7. Para cualquier transversal, todos los pares de ángulos interiores alternos son iguales.

Un hecho muy importante sobre los triángulos le sigue al punto 7.

Dato a conocer: La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180° .

.....
Esto es si dibujamos *cualquier triángulo* de *cualquier* forma y añadimos las medidas de sus tres ángulos, la suma de los ángulos *siempre* será 180° .

Si un triángulo contiene un ángulo recto, la suma de sus otros dos ángulos también debe ser un ángulo recto. Dos ángulos que se relacionan el uno con el otro de esta manera tienen muchas propiedades interesantes y útiles. Este caso especial se origina lo suficientemente a menudo para tener un nombre propio.

Palabras a conocer: Dos ángulos con medidas que suman 90° se llaman **ángulos complementarios**. Cada uno se llama el **complemento** del otro.

Contesta estas preguntas para ver por qué la suma de los ángulos de un triángulo es *siempre* 180° , independientemente de la forma del triángulo. Las preguntas se refieren a la Figura 2.32, la cual muestra un triángulo con una línea a través de su vértice superior paralelo a su línea de base.

1. ¿Cuáles tres ángulos debes añadir para formar la suma de los ángulos de este triángulo?
2. ¿Qué puedes decir sobre los dos ángulos marcados 1? ¿Por qué?
3. ¿Qué puedes decir sobre los dos ángulos marcados 2? ¿Por qué?
4. ¿Qué puedes decir sobre los ángulos formados por los ángulos 1, 2, y 3 en la parte superior de la figura? ¿Por qué?
5. ¿Terminamos? ¿Por qué sí o por qué no?
6. ¿Dependen tus respuestas a cualquiera de las preguntas anteriores de conocer las medidas de los ángulos 1, 2, y 3?



Figura 2.32

En un capítulo anterior viste que los polígonos podrían ser triangulados (subdividir en triángulos). Usa este hecho para ayudarte a contestar estas preguntas.

1. ¿Cuáles son las sumas de los ángulos de un cuadrilátero? ¿Tienen todos los ángulos de los cuadriláteros la misma suma? Justifica tus respuestas.

2. ¿Cuál es la suma de los ángulos de un pentágono?
¿Tienen todos los ángulos de los pentágonos la misma suma? Justifica tus respuestas.
3. ¿Cuál es la suma de los ángulos de un hexágono? ¿Tienen todos los ángulos de los hexágonos la misma suma? Justifica tus respuestas.
4. Si alguien que tiene un polígono escondido te dijera el número de lados de tal polígono, ¿podrías descubrir la suma de sus ángulos? ¿Apostarías \$100 a que estás correcto sin ver el polígono primero? Explica.

1. Cuando cruzas líneas paralelas con líneas transversales paralelas, ¿qué tipo de figura consigues? ¿Cómo se llama?
2. Cuando esta figura fue definida en el capítulo 1, ¿usó la definición líneas paralelas? ¿Cómo lo definirías, si estuvieras haciendo tu propia definición?
3. ¿Crees que tu definición y la definición en el capítulo 1 siempre se refieren a exactamente las mismas figuras? Explica.

Conjunto de ejercicios: 2.5

1. (a) Dibuja una letra mayúscula del alfabeto que esté formada por un par de ángulos interiores alternos y una que esté formada por un par de ángulos verticales.
(b) ¿Por qué cada una de estas afirmaciones sobre algún ángulo, el $\angle A$, no hace sentido por si mismo? (*Pista:* Es la misma razón en cada caso.)

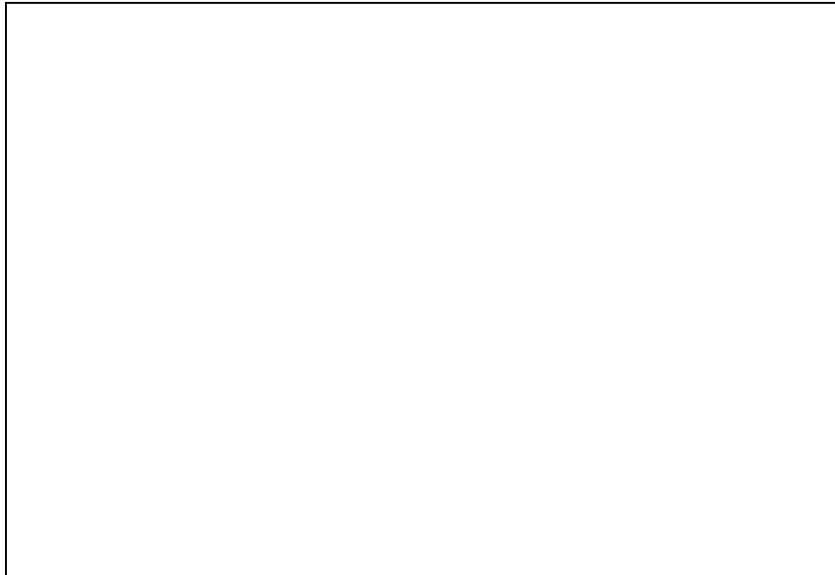
El $\angle A$ es un ángulo vertical.

El $\angle A$ es un ángulo interior alterno.

El $\angle A$ es un ángulo correspondiente.

El $\angle A$ es un ángulo suplementario.

2. Estas preguntas hacen referencia a los diagramas de las armaduras del techo en la Figura 2.33.
- (a) La armadura *B* delinea dos triángulos rectángulos, a la centésima más cercana de un grado, ¿cuál es el tamaño de cada ángulo en estos triángulos rectángulos? Explica cómo conseguiste tus respuestas.
 - (b) Supón que la parte central vertical de la armadura *B* es 5 pies de largo. Encuentra la longitud de los otros dos lados de cada triángulo rectángulo. Redondea tus respuestas a la pulgada más cercana.
 - (c) La parte superior de la armadura *C* delinea dos triángulos rectángulos. ¿Cuál es el tamaño de cada ángulo en estos triángulos rectángulos llevándolo a la décima más cercana de un grado? Explica cómo conseguiste tus respuestas.
 - (d) Supón que la parte central del pilar vertical de la armadura *C* es 9 pies de largo. Encuentra la longitud de los otros dos lados de cada triángulo rectángulo. Redondea tus respuestas a la pulgada más cercana.

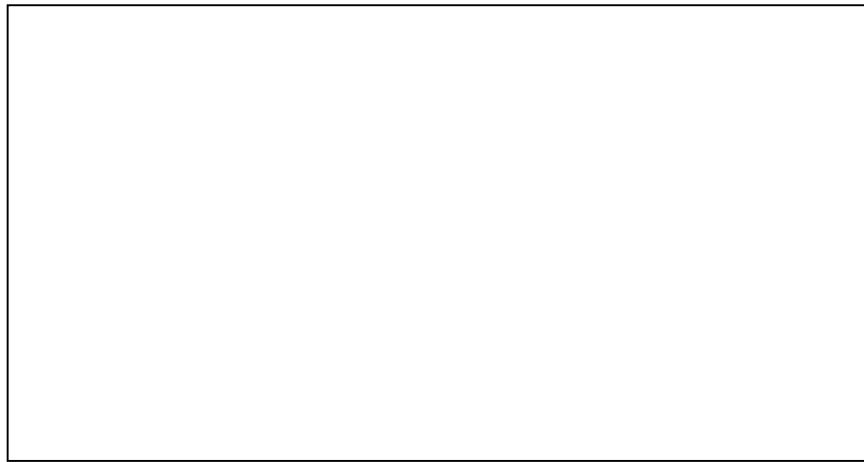


De John L. Feirer, Gilbert R. Hutchings y Mark D. Feirer, *Carpentry and Building Construction*, 5ta. edición (New York: Glencoe/McGraw Hill, 1997), p. 487.
Reproducido con permiso.

3. El diagrama en la Figura 2.34 es un rompecabezas que tiene las siguientes propiedades,

- $CDJK$ es un rectángulo.
- El $\angle F$ y el $\angle G$ son ángulos rectos.
- Los triángulos ABN y HLN son equiláteros.
- El $\angle AML$ y el $\angle MLB$ son ángulos suplementarios.

En esta figura, 14 de los ángulos son congruentes a $\angle BEH$, el cual está marcado con una estrella. Sin medir nada, encuentra por lo menos cinco de ellos. ¿Puedes encontrar 10? ¿Los puedes encontrar todos? Justifica cada ángulo que escojas.



Las medidas en esta figura no son exactas.

Figura 2.34

4. (a) Los $\angle A$ y $\angle B$ tienen pendientes que miden $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$, respectivamente.

Encuentra sus medidas en grados, redondeadas a un lugar decimal. Luego encuentra la suma de las medidas de sus grados y el producto de las medidas de su pendiente. ¿Cómo están relacionados el $\angle A$ y el $\angle B$?

(b) Los $\angle C$ y $\angle D$ tienen una pendiente que mide 6.25 y 0.16, respectivamente. Encuentra sus medidas en grados, redondeada a un lugar decimal. Luego encuentra la suma de las medidas de sus grados y el producto de las medidas de su pendiente. ¿Cómo están relacionados los $\angle C$ y $\angle D$?

- (c) Los $\angle E = 33^\circ$ y $\angle F = 57^\circ$. Encuentra las medidas de sus pendientes redondeadas a dos lugares decimales. Luego encuentra la suma de sus medidas de sus grados y el producto de la medida de su pendiente. ¿Cómo están relacionados los $\angle E$ y $\angle F$?
- (d) ¿Qué patrón ves en la información de las partes (a) – (c)? Haz una regla general basada en ese patrón.
- (e) ¿Qué ángulo debe ser apareado con un ángulo de 72° para que se ajuste al patrón que ves? ¿Trabaja tu regla general para estos dos ángulos? Explica.
- (f) Un ángulo tiene una pendiente que mide $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la medida de la pendiente de sus complementos? Debes de poder encontrar esto *sin* encontrar la medida en grados del ángulo.
- (g) Un ángulo tiene una pendiente que mide 3.58. ¿Cuál es la medida de la pendiente de sus complementos? Debes encontrar esto *sin* encontrar la medida en grados del ángulo.
5. En el capítulo 1 vimos que algunas figuras se pueden usar para enlosar un área. Esto es, las copias de una figura pueden cubrir un área completamente, sin cavidades entre los bordes.
- (a) Extiende la parte superior e inferior de las líneas paralelas en la Figura 2.32 (previamente mostrada en la página 161) para formar una franja larga. Luego describe cómo el triángulo en la figura puede ser utilizado para enlosar la franja lo más lejos que quieras en cualquier dirección. Dibuja un boceto para ilustrar tu descripción.

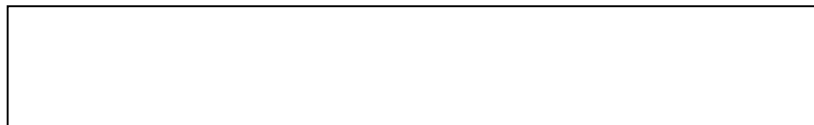


Figura 2.32

- (b) Dibuja un triángulo de cualquier forma que escojas. ¡Hazlo lo más raro que quieras! Luego muestra cómo el proceso que describiste en la parte (a) garantiza que tu triángulo puede ser usado para enlosar una franja entre dos líneas paralelas.
- (c) Explica y justifica esta afirmación. Si puedes enlosar una franja, entonces puedes enlosar un plano.

- (d) Las franjas entre líneas paralelas se pueden colocar una al lado de la otra de muchas maneras diferentes. Haz un dibujo de por lo menos tres de tus franjas del triángulo, corriendo horizontalmente y organizadas de tal manera que los vértices correspondientes de los triángulos se alineen verticalmente.
- (e) Haz otro dibujo de por lo menos tres de tus franjas triangulares, corriendo horizontalmente y organizadas de tal manera que cada lado de cada triángulo se alinee a lo largo de una línea recta con un lado de otro triángulo.
- (f) Las partes (d) y (e) ilustran dos maneras diferentes de usar tu triángulo para enlosar un plano. ¿Puedes pensar en una tercera manera? ¿Qué manera te gusta más? ¿Por qué?
6. Dos palabras en inglés que se pronuncian de la misma manera pero que tienen diferentes significados son *complement* “complemento” y *compliment* “cumplido”. Busca estas dos palabras en un diccionario y escribe una definición para cada una (como nombre). Entonces explica por qué hace sentido aplicar una de estas palabras a los ángulos, pero no la otra.

