2.6 Los paralelogramos y los triángulos congruentes

Los polígonos son figuras hechas de segmentos de líneas y ángulos. En capítulos anteriores, examinamos la longitud de sus lados y sus simetrías. Ahora es tiempo de ver qué cosas útiles se pueden decir acerca de los ángulos de los polígonos. Hay muchas, muchas cosas que *podríamos* decir sobre ellos –algunas interesantes y otras no, algunas útiles y otras no. Para mantener esta sección y las próximas dos libres de un desorden de detalles irremediable, éstas han sido formuladas alrededor de una pregunta con un sólo tema.

¿Cuánta información es suficiente para determinar un polígono?

Esta sección y la próxima se enfocan en los triángulos. La sección 2.8 extiende nuestras exploraciones y hallazgos a otros polígonos.

En el capítulo 1 encontraste que la longitud de los tres lados son suficiente para determinar un triángulo –no su localización exacta, pero su tamaño y su forma. Esto es, cualquier dos triángulos con lados de la misma longitud deben ser congruentes. Este principio es abreviado como **SSS** –el cual representa lado-lado-lado (side-side-side) (SSS, por sus siglas en inglés).

> **Dato a conocer:** (**SSS**) Si los tres lados de un triángulo tienen las mismas longitudes a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

……………………………………………………………………..

Así que *determinar* en realidad se debe entender en términos de congruencia. Una figura es *determinada* si no hay duda o ambigüedad sobre su tamaño o forma. Algunas veces esto se llama "determinado hasta la congruencia". Si una figura es determinada por alguna información, debería de haber una manera de encontrar *cualquier* otro hecho acerca de su tamaño o forma, de esa información. La manera puede que no sea obvia o fácil, pero si la figura se determina, ¡*tiene que haber una manera*!

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Encontrar las medidas de todos los lados y todos los ángulos de un triángulo si conoces dos lados y el ángulo incluido

Encontrar la medida de todos los ángulos de un triángulo si conoces sus tres lados

Explicar y usar una fórmula para encontrar el área de un paralelogramo.

Para SSS, hay solamente un triángulo (hasta la congruencia) cuyos lados tienen longitudes de 4, 5, y 7 pulgadas. Encuentra cada uno de los siguientes hechos sobre este triángulo. Dibuja y mide tan poco como puedas, pero haz tanto como creas que necesites. En cada caso, explica tu enfoque a la pregunta. Encuentra

1. **su perímetro**
2. **la longitud de la altitud del lado de 7 pulgadas a la vértice opuesta**
3. **el área incluida por el triángulo**
4. **el tamaño de cada ángulo**

¿Por qué crees que queremos que dibujes y midas tan poco como sea posible?

Para el ejercicio 2 de la pregunta anterior, ¿cómo encontraste la altitud del triángulo? ¿Dibujaste un diagrama y lo mediste? Eso está bien, si tienes un lápiz muy afilado y tienes cuidado, pero ¿que tal si el triángulo fuera de 4 por 5 por 7 *millas*, en vez de pulgadas? O, ¿qué tal si no tienes buenas herramientas para medir, o si quieres una respuesta precisa? Hay una manera de encontrar la altitud exacta, sin medir nada. Aquí está cómo:

1. Comienza con un boceto. Puedes dibujar el tuyo propio o mirar la Figura 2.35. Dibuja la altitud que quieras y llámala longitud a. El pie de esta altitud divide el lado de 7 pulgadas en dos segmentos. Si llamas la longitud de un segmento x, entonces la longitud de la otra es $7 - x$.

Figura 2.35

2. Aplica el Teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectos formados por esta altitud.

$$x^2 + a^2 = 4^2 \text{ y } (7 - x)^2 + a^2 = 5^2$$

3. Cada una de estas ecuaciones se puede reescribir como $a^2 =$ [**algo**].

$$a^2 = 4^2 - x^2 \text{ y } a^2 = 5^2 - (7 - x)^2$$

4. Tienes dos cosas que se igualan a a^2, así que deben de igualarse a la otra.

5. Ahora solo trabaja la aritmética y resuélvelo para la x.

6. Ahora puedes encontrar a solamente sustituyendo $\frac{40}{14}$ por x en una de las primeras ecuaciones.

Computa el lado numérico de esta ecuación con tu calculadora. Luego toma su raíz cuadrada para obtener a. ¿Qué obtuviste? ¿Está de acuerdo con lo que obtuviste anteriormente?

El problema sobre los impuestos estatales del periódico *The Daily Planet*, al final de esta sección, te dará una oportunidad para que uses la técnica en una situación de la vida real.

La prueba de SSS para los triángulos congruentes se puede utilizar para obtener una fórmula conveniente para encontrar el área del paralelogramo.

1. **Supongamos que *ABCD* es un paralelogramo, como en la Figura 2.36. Usa SSS para hacer un argumento convincente de que la diagonal *BD* divide el paralelogramo en dos triángulos congruentes. (*Pista:* Recuerda la definición de un paralelogramo dada en el capítulo 1.)**
2. **Si la longitud de *BC* es 7 y la distancia vertical de *BC* a *D* es 4, ¿cuál es el área del triángulo *BCD*? ¿Cuál es el área del triángulo *ABD*? ¿Cuál es el área del paralelogramo *ABCD*? ¿Cómo lo sabes?**

3. **Si la longitud de *BC* es *b* y la distancia vertical de *BC* a *D* es *h*, ¿cuál es el área del triángulo *BCD*? ¿Cuál es el área del triángulo *ABD*? ¿Cuál es el área del paralelogramo *ABCD*? ¿Cómo lo sabes?**
4. **Escribe una fórmula general para el área de un paralelogramo. Asegúrate decir qué representan las letras en tu fórmula.**

height = altura

base = base

Figura 2.36

Sugerencia

Trata de visualizar. Un dibujo mental a menudo puede dirigirte a través de un ejemplo más confiable que los pasos o fórmulas memorizadas.

Algunas veces otras combinaciones de tres, o hasta dos piezas de información son suficientes para determinar un triángulo. Aquí hay algunos ejemplos para ayudarte a ver cuáles combinaciones trabajan de esta manera. Según las trabajes, trata de visualizar en tu mente las piezas del triángulo que se te han dado.

En cada uno de los siguientes casos,

- **Si piensas que los datos dados determinan un triángulo en particular, dibújalo.**
- **Si piensas que los datos dados pueden ser ciertos para más de un triángulo, dibuja dos triángulos diferentes (no congruentes) que encajen con esos datos.**
- **Si piensas que ningún triángulo encaja con los datos dados, explica por qué.**

1. **Dos de los lados tienen 6 cm. y 8 cm. de largo; el ángulo incluido (el ángulo entre ellos) es 40º.**
2. **Dos de los lados tienen 6 cm. y 8 cm. de largo; un ángulo que no se encuentra entre ellos es 40º.**
3. **Dos de los ángulos son 30º y 45º; el lado incluido (el lado entre ellos) es de 5 cm. de largo.**

4. **Dos de los ángulos son 30º y 45º; un lado que no está entre ellos es 5 cm. de largo.**
5. **Los tres ángulos son 50º, 60º y 70º.**
6. **Los tres ángulos son 60º, 70º y 80º.**
7. **Es equilátero y tiene un perímetro de 21 cm.**

Aquí hay un ejemplo de cómo una situación como la pregunta 1 anterior podría ocurrir en la vida real.

> Smalltown es dueño de parte de Puddle Lake, incluyendo una ensenada arenosa y llana. El departamento de recreación quiere poner una línea de boyas a través de la ensenada para delimitar un área para los niños, como se muestra en la Figura 2.37. ¿Cuán larga deberá ser la línea de boyas?

Por supuesto, no podemos contestar esta pregunta todavía, ya que no tenemos las medidas. La ensanada puede ser de solo unos pies de ancho (poco probable) o varias millas de ancho (también poco probable) o cualquier tamaño entre medio (mayor probabilidad). ¿Cómo puedes hacerle frente al problema?

PICTURE

float line = línea de boyas

shore = orilla

Figura 2.37

Una manera es mojándose. Esquivar a través de la ensenada, estirando una cuerda larga de un lado a otro de la orilla. Pero hoy el agua esta muy fría. Otra manera es pensando en la línea de boyas como parte de un triángulo que tiene dos lados secos. Llama la línea de boyas AB y escoge un punto C en la orilla para que los caminos rectos de C a ambos A y B sean completamente en tierra seca, como en la Figura 2.38. Ahora podemos medir directamente a AC, BC, y el ángulo incluido, $\angle ACB$.

línea de boyas

orilla

Figura 2.38

Una vez conozcas dos lados y el ángulo incluido, se ha determinado el triángulo (hasta la congruencia). Solo una forma y tamaño triangular encajarán en esa descripción porque las posiciones de sus extremos abiertos de los dos lados están fijas exactamente por sus distancias desde el vértice del ángulo incluido. El segmento de línea entre aquellos dos puntos fijos es el tercer lado del triángulo. En este caso, las medidas para los lados secos del triángulo formado por la línea de boyas son: AC es 135 pies de largo, BC es 93 pies de largo, y el $\angle ABC$ es 72º. ¿Ahora qué?

1. **¿Cuán larga es la línea de boyas? Explica como conseguiste tus respuestas.**
2. **¿Es tu respuesta *exactamente* precisa? ¿Piensas que está dentro de un pie de ser exacta? ¿Es suficientemente precisa para hacer la línea de boyas? Explica.**
3. **¿Cuál piensas es más fácil de medir en esta situación – las longitudes de los lados o el ángulo incluido? ¿Por qué?**

Aquí hay una manera de encontrar la longitud de la línea de boyas sin realmente tener que medir el ángulo entre AC y BC:

- Extiende AC a través de C a lo largo de una línea recta hasta el punto A' tal como $A'C$ es igual en longitud a AC. Haz lo mismo con BC, haciendo que $B'C$ iguale a BC, como se muestra en la Figura 2.39.
- Nota que el $\angle A'CB' = \angle ACB$. ¿Por qué? Esto significa que dos lados del triángulo ABC y el ángulo entre ellos tienen la misma medida que dos lados del triángulo $A'B'C$ y el ángulo entre ellos.
- Ya que dos lados y el ángulo incluido determinan un triángulo hasta su congruencia, los triángulos ABC y $A'B'C$ deben de ser congruentes. Esto significa que el lado de la línea de boyas, AB, debe tener la misma longitud que el lado seco $A'B'$. Así, que para encontrar la longitud de la línea de boya, sólo tienes que medir la distancia entre A' y B'.

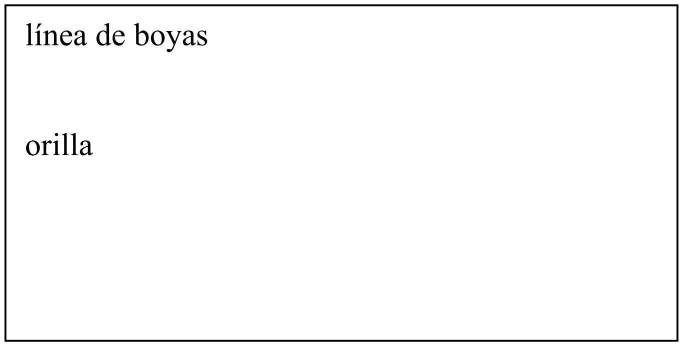


Figura 2.39

El ejemplo que acabamos de hacer ilustra un principio básico para determinar triángulos: la medida de dos lados de un triángulo y el ángulo incluido son suficientes para determinar el tamaño y la forma del triángulo. Este principio es abreviado **SAS** (por sus siglas en inglés) --el cual representa lado-ángulo-lado (side-angle-side).

> **Dato a conocer:** (**SAS**) Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo tienen las mismas medidas como dos lados y el ángulo incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

En la Figura 2.40, el punto *E* es el punto medio de *AC*, el punto *F* es el punto medio de *AB*, y *DE* es exactamente la mitad de largo que *AB* y paralelo a éste. El tamaño exacto y la forma del Δ*ABC* no se conocen.

1. **Usa el SAS para explicar por qué los siguientes cuatro triángulos deben ser congruentes:**

   Δ*AFE*   Δ*EDC*   Δ*DEF*   Δ*FBD*

2. **Explica por qué *D* debe de ser el punto medio de *BC*.**
3. **Si el área del Δ*ABC* es 150 pulgadas cuadradas, ¿cuál es el área del Δ*DEF*?**

4. **¿Dependen las respuestas de las preguntas 1, 2 y 3 en saber exactamente el tamaño de los lados individuales o los ángulos individuales del ΔABC? Justifica tu respuesta.**
5. **Si también sabes que el perímetro del ΔABC es 60 pulgadas, ¿puedes encontrar el perímetro del ΔDEF? Si puedes, hazlo. Explícalo.**

Esta figura puede que no esté dibujada a escala.

Figura 2.40

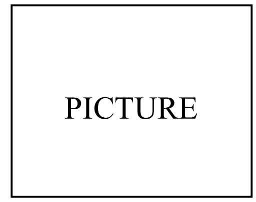
Conjunto de ejercicios: 2.6

1. **(a)** Encuentra las áreas de estos dos paralelogramos.
    (i) base = 13 pies, altura = 5.2 pies
    (ii) base = 19.7 metros, altura = 6.5 metros

    (b) Encuentra las áreas de un paralelogramo con los lados de 12 pies y 8 pies y un ángulo de 45º. (*Pistas:* Haz un boceto. Aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar la altura.)

2. En el centro de la Metrópolis, la tierra es muy cara y los impuestos son altos. Cuando la autopista nueva se construyó, los agrimensores tomaron un pedazo triangular estrecho de tierra de la propiedad del periódico *The Daily Planet*. Los lados de este segmento triangular son 110 pies, 300 pies, y 400 pies. Ya que los impuestos están basados en los pies cuadrados de la tierra, la administración de *The Daily Planet* necesita saber exactamente cuántos pies cuadrados de tierra perdieron, para así poder apelar a las oficinas de los tasadores de la ciudad para una reducción de sus impuestos. ¿Cuánta tierra perdieron? (*Pista:* Usa algo de álgebra y tu calculadora.)

3. La compañía de bienes raíces Ripoff está vendiendo lotes de terreno a lo largo de la parte frontal del Río Rocky. Están valorados en \$250 por pie de área frontal (medido a lo largo de la orilla), y la compañía dice que el terreno se extiende 250 pies desde el río hasta la otra línea limítrofe. Ellos están anunciando el terreno a "sólo \$1 por pie cuadrado." La Figura 2.41 es un dibujo calcado del mapa de los impuestos del pueblo, mostrando alguno de los lotes. Como puedes ver, la línea limítrofe no va desde la orilla a los ángulos rectos.



(a) ¿Es el precio del terreno \$1 por pie cuadrado, más que eso, o menos que eso? Explica.
(b) Al medir el diagrama cuidadosamente, encuentra la altura del lote 1. Usa la orilla del río como base. Luego encuentra el área de este lote.
(c) ¿Cuál es el precio del lote 1? ¿Cuánto cuesta por pie cuadrado?
(d) Encuentra el área del lote 2. ¿Cuál es el precio? ¿Cuánto cuesta por pie cuadrado?
(e) Escribe una función que te de el área de un lote que tenga x pies en la parte frontal del río.

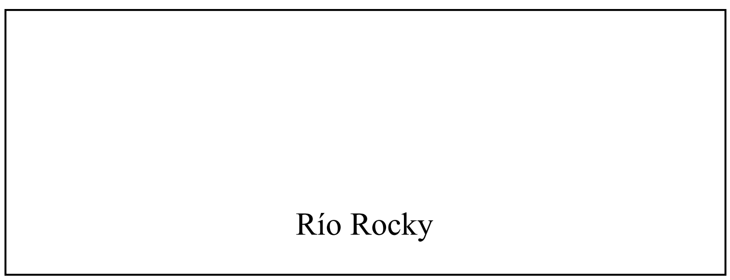


Figura 2.41

4. Los científicos quieren saber si el universo se está expandiendo, contrayendo o quedándose del mismo tamaño. Para hacer esto, necesitan saber dónde está cada una de las estrellas. Si las distancias entre las estrellas se encogen, entonces el universo se está contrayendo y algún día colapsará. Si la distancia se queda igual, entonces el universo no se está expandiendo ni encogiéndose. Si las distancias aumentan, entonces el universo se está expandiendo.

¿Cómo encuentras las distancias entre dos estrellas? No puedes medirlas directamente. Nadie ha podido llegar a otra estrella y nadie sabe cómo construir una máquina para llegar a ellas. Pero puede que sea una cuestión de tiempo. Así que lo tenemos que hacer desde aquí. Primero, tienes que saber la distancia de la Tierra a cada una de las estrellas. Un ejercicio en la próxima sección te muestra cómo hacer eso. Entonces, necesitas saber el ángulo entre ellas cuando las ves desde la Tierra. Por ejemplo, si quieres saber la distancia entre Zuben Eljanubi y Aldebarán, necesitas observar cada una, conseguir sus distancias desde la Tierra, y medir el ángulo entre las dos líneas de avistamiento. Observa la Figura 2.42. En este caso, el ángulo de separación es 122°, la distancia a Zuben Eljanubi es 61 años luz, y la distancia a Aldebarán es 60 años luz.

Explica por qué estas medidas son información suficiente para determinar las distancias entre Zuben Eljanubi y Aldebarán. ¿Qué principio geométrico en esta sección garantiza que éstas medidas son suficientes? Haz un bosquejo lo más claro posible del proceso para encontrar esta distancia. Si puedes encontrar la distancia, hazlo. Si no puedes, describe qué parte(s) del proceso no sabes hacer.

Zuben Eljanubi 61 años luz Aldebarán 60 años luz ángulo de separación Zuben-Tierra-Aldebarán = 122°

Figura 2.42

5. En el capítulo 1, viste que las diagonales de un rombo son bisectrices perpendiculares una de otra. ¿Qué tal lo contrario a esta afirmación: si las diagonales de un cuadrilátero son bisectrices perpendiculares una de otra, deberá ser ese cuadrilátero un rombo? Justifica tu respuesta dando un contraejemplo o probándolo (dando un argumento lógico que funcione en cada caso).

(*Pistas*: Comienza por asegurarte de recordar lo que significa un *rombo* y una *bisectriz perpendicular*. Luego haz un boceto de lo que sabes sobre las diagonales. ¿Determina eso el resto de la figura? ¿Puedes convertir lo que ves en un argumento lógico?)

6. Supón que la distancia perpendicular de una de las dos líneas a la otra es la misma en dos lugares diferentes. ¿Deberán las líneas ser paralelas? Da un argumento lógico para justificar tu respuesta.

(*Pista*: Dibuja un diagrama de cómo se vería si las líneas no fueran paralelas. Entonces marca tu diagrama con letras para ayudarte a clarificar tus pensamientos y escritura.)