2.7 Otras pruebas para los triángulos congruentes

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Encontrar las medidas de todos los lados y todos los ángulos de un triángulo si conoces dos ángulos y un lado

Dar ejemplos para mostrar que el conocer dos lados y un ángulo que *no* está entre ellos no determina un triángulo

Dar ejemplos para mostrar que tres ángulos no determinan un triángulo

Describir las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo isósceles.

En la sección anterior viste que un triángulo se determina por cualquiera de dos de sus lados y el ángulo entre ellos. Pero algunas veces sólo se puede medir un lado del triángulo. Si los ángulos en cualquier extremo se pueden medir también, eso es suficiente para determinar el triángulo, como puedes ver en la Figura 2.43. Ya que sabemos las medidas de los ángulos, los otros lados del triángulo deben caer a lo largo de las líneas de puntos. Pero las dos líneas que no son paralelas deben de cruzarse en un solo punto; ese punto es el tercer vértice del triángulo.

Figura 2.43

He aquí un ejemplo de cómo se puede usar este dato:

Dos desarrolladores de terreno están parados en un campo plano en la base de una pequeña montaña. Ellos planifican construir un teleférico en un lado de la montaña, la cual es muy escarpada para una pista de esquiar. Para estimar la longitud del cable principal, ellos quieren saber la distancia aproximada de la línea recta del tope de la montaña al lugar donde están parados. ¿Cómo lo pueden saber?

¿Puedes describir la estrategia para este problema basado en la idea de que dos ángulos y el lado incluido determinan un triángulo? ¿Cómo podrías comenzar a enfrentar este problema? ¿Te ayudaría la Figura 2.44?

Figura 2.44

¿Te sugiere una estrategia la Figura 2.44? He aquí el enfoque que estábamos pensando cuando dibujamos la Figura:

- Los desarrolladores están parados en una superficie plana en el punto *A*. Usando una herramienta de agrimensura, ellos pueden encontrar el ángulo entre la tierra y una línea de visión de *A* al tope de la montaña, *T*. Ese ángulo mide 60°. Ellos quieren saber la longitud de *AT*.
- Ellos se alejan de la montaña otros 300 pies (al punto *B*) y miden el ángulo entre la tierra y la línea de visión al tope de la montaña; este ángulo mide 50°.
- Ahora ellos conocen dos ángulos y el lado incluido del triángulo, *ABT*: el lado *AB* tiene 300 pies de longitud, el $\angle ABT$ mide 50°, y también conocen la medida del $\angle BAT$. ¿Cuál es? Esto significa que el triángulo ha sido determinado; ellos pueden fácilmente encontrar la longitud aproximada de *AT* haciendo un dibujo a escala y midiendo ese lado.

Termínale el problema a los desarrolladores. Encuentra la distancia aproximada del punto *A* al tope de la montaña. ¿Cuán cerca piensas que la aproximación de tu medida está a la distancia actual?

El ejemplo del teleférico ilustra que las medidas de dos ángulos de un triángulo y el lado incluido son suficientes para determinar el tamaño y la forma del triángulo. Este principio está abreviado como **ASA** (por sus siglas en inglés) – el cual representa ángulo-lado-ángulo (angle-side-angle).

Dato a conocer: (**ASA**) Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo tienen la misma medida que dos ángulos y el lado incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

El principio de ASA es la base para la **triangulación**, el proceso de encontrar la localización usado por los agrimensores, navegantes, equipos de búsqueda y rescate y otros. El siguiente ejercicio muestra como trabaja para los bomberos guardabosques en los bosques del norte.

La torre del miradero en el Monte Abraham y la Montaña Snow están separadas por 29 millas. Un bombero guardabosque en cada torre vigila los fuegos forestales. Cuando el humo sube sobre los árboles, cada guardabosque mide el ángulo entre la dirección del humo y la línea entre las dos torres. De los dos ángulos y la distancia entre las torres, los guardabosques saben exactamente donde enviar a los bomberos.

1. **Un día los guardabosques divisaron una columna de humo. Del Monte Abraham, el ángulo del humo es 44°. De la Montaña Snow, el ángulo del humo es 37°. Observa la Figura 2.45. Haz un dibujo a escala del triángulo resultante y mide la distancia aproximada de la línea recta de cada torre al humo.**

Términos

El significado literal de *trigonometría* es la medida de los triángulos.

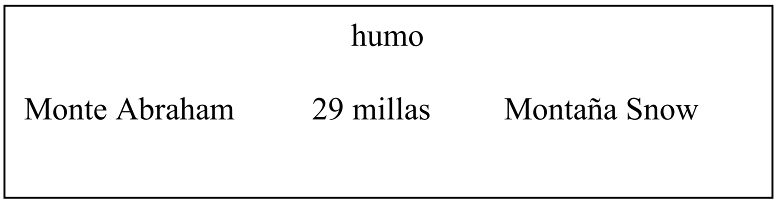
Por supuesto, los guardabosques no dibujan ni miden el triángulo para conocer la localización del humo. Ellos usan herramientas de trigonometría que no has aprendido todavía. Tú puedes usar tu calculadora gráfica y ecuaciones lineales para encontrar el otro vértice del triángulo (el humo). Comienza imaginándote que el Monte Abraham está al origen del sistema de coordenadas y la Montaña Snow está en el eje de x a (29, 0). Refiérete a la Figura 2.46 para esta configuración y las siguientes preguntas:

2. **¿Cuál es la pendiente de la línea l_1? ¿Cuál es la ecuación?**

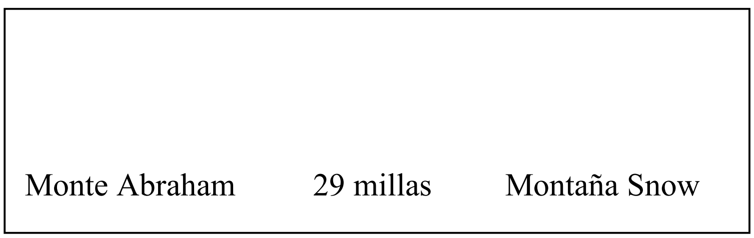
3. **¿Cuál es la pendiente de la línea l_2? ¿Cuál es su ecuación? Ten cuidado; usa el sentido común.**

4. **Diagrama las líneas l_1 y l_2 en tu calculadora. Entonces, usa TRACE para encontrar el punto aproximado de la intersección.**

5. **Calcula las distancias entre este punto de intersección y los puntos para las dos torres de las montañas. ¿Están de acuerdo estas respuestas (aproximadamente) con tus contestaciones del ejercicio 1? Si no es así, ¿qué explica la diferencia?**



El dibujo no está hecho a escala.
Figura 2.45



El dibujo no está hecho a escala.
Figura 2.46

Si conoces las medidas de *cualesquiera* dos ángulos de un triángulo también conoces la medida del tercer ángulo, restándolo. La suma de los ángulos de un triángulo es 180º, así que la medida del tercer ángulo es 180º grados menos las medidas de los otros dos ángulos. Por lo tanto, si conoces un lado y *cualesquiera* dos ángulos de un triángulo realmente conoces los ángulos en cada extremo del lado conocido. Esto nos permite extender el principio **AAS** a un caso relacionado cercano – frecuentemente llamado ángulo-ángulo-lado (angle-angle-side).

Dato a conocer: (**AAS**) Si dos ángulos y un lado que no está entre ellos en un triángulo tienen las mismas medidas a los dos ángulos correspondientes y a un lado correspondiente en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

…………………………………………………………………..

PICTURE

1. En la Figura 2.46, ¿Cuál es la medida del ángulo en el humo? ¿Cómo lo sabes?

2. Una excursionista de distancias largas con un teléfono celular se cae en el bosque y se disloca el tobillo. Ella puede ver las torres en el Monte Abraham y en la Montaña Snow, pero ninguno de los guardabosques en cualquiera de las torres pueden verla a ella. Ella llama al guardabosque de la Montaña Snow y le dice que usando su compás ella determinó que el ángulo entre sus líneas de visión a estas dos torres es alrededor de 105º y que ella está directamente entre la torre de la Montaña Snow y una tercera torre que ambos, ella y el guardabosque, pueden ver.

(a) El guardabosque de la Montaña Snow sabe que la torre del Monte Abraham está a 29 millas. ¿Cómo el guardabosque puede saber a dónde enviar los paramédicos?

(b) El ángulo entre la línea de visión de la Montaña Snow a la torre del Monte Abraham y a la torre detrás de la excursionista es 60º. Haciendo un dibujo a escala localiza a la excursionista encontrando cuán lejos ella está de cada torre.

Di un principio de congruencia que tu pienses podría ser abreviado como SSA. Fíjate en la Figura 2.47; luego explica cómo esta figura muestra que SSA *no* es un principio válido para determinar un triángulo. ¿Cuán cerca puedes llegar a determinar un triángulo usando SSA?

Tú conoces el principio SSS, el cual dice que las longitudes de los tres lados determinan exactamente una forma triangular y tamaño. ¿Y qué tal AAA? ¿Determina el conocer los tres ángulos el tamaño y la forma de un triángulo?

Escoge tres tamaños de ángulos que sumen 180º. Luego, usando un transportador y una regla, dibuja cuatro triángulos que tengan estos tamaños de ángulos. Haz los triángulos tan diferentes como puedas. Luego hazlos otra vez –escoge otros tres tamaños de ángulos que sumen 180º y dibuja otros cuatro triángulos.

Escribe un párrafo describiendo lo que observas, y sugiere un principio general para AAA. Explica cómo tu principio se relaciona a los triángulos que dibujaste.

Figura 2.47

En el capítulo 1 examinaste triángulos isósceles y equiláteros usando simetría. También trabajaste con una regla (sin marcas) y un compás para hacer dibujos precisos. Observemos nuevamente estas cosas, pero de un punto de vista diferente. Usaremos solamente una regla y un compás para construir estas figuras y explorar sus propiedades.

¿Por qué solamente una regla y un compás? Porque ellos son *sencillos*. Frecuentemente, mientras más sencillas sean las herramientas que uses más clara se forman las ideas fundamentales. De hecho, nosotros no vamos a usar las marcas en la regla. Solamente la rectitud de su borde. No necesitamos molestarnos en medir longitudes o ángulos. Todo lo que realmente necesitamos son herramientas para hacer líneas rectas y círculos. Si tu quedas varado en una isla desierta con solamente un pedazo de madera y un pedazo de cordón, ¡todavía puedes dibujar estas figuras en la arena! Usando estas herramientas, podrás ver claramente cómo las propiedades de ángulos de los triángulos isósceles y equiláteros se relacionan a los principios de esta sección.

Sugerencia

Conduce una estrategia sencilla. Usando herramientas básicas y sencillas para contestar una pregunta, algunas veces revela sus conexiones a otras ideas. Aún cuando éstas no funcionan, el analizar el por qué no lo hacen, puede ser útil.

Comencemos con un triángulo isósceles. Recuerda que un triángulo es **isósceles** si dos de sus lados tienen la misma longitud. Frecuentemente, un triángulo isósceles es dibujado con el tercer lado en el fondo al cual se le llama la **base**. La Figura 2.48 muestra un triángulo isósceles. La base es *RS*; los lados *RT* y *ST* tienen la misma longitud. Las líneas entrecortadas forman la línea de simetría. Si doblas el triángulo a lo largo de la línea de simetría, los lados serán iguales y los vértices *R* y *S* serán iguales.

Figura 2.48

Usa una regla y un compás para dibujar un triángulo isósceles sin medirlo, como sigue:

- **Usa una regla para hacer dos segmentos de líneas que se encuentren en un punto. Llama a este el punto *A*.**
- **Coloca la punta de tu compás en *A*, y dibuja un arco circular donde intersequen ambos segmentos de líneas. Llama a estos puntos de intersección *B* y *C*.**
- **Conecta *B* y *C* con un segmento de línea.**

1. **¿Cuáles dos lados del ΔABC tienen la misma longitud? ¿Cómo lo sabes?**

Ahora construye la línea de simetría, como sigue:

- **Coloca la punta del eje de tu compás en *B*, haz la extensión de la apertura del compás más allá de la mitad de *C* y dibuja un círculo.**
- **Sin cambiar la apertura del compás, mueve la punta del eje a *C* y dibuja un círculo.**
- **Escoge uno de los dos puntos de intersección de los dos círculos y llama a este *D*. El punto más lejano de *A* probablemente será más fácil de trabajar, pero en realidad no importa.**
- **Dibuja la línea *AD*.**

2. **¿Es en *realidad AD* la línea de simetría? ¿Cómo puedes estar seguro?**

En la pregunta anterior, dijimos que *AD* es la línea de simetría para tu triángulo isósceles, ΔABC. Esto significa que *AD* divide al ΔABC en dos mitades congruentes. ¿Cómo podemos estar tan seguros? Después de todo, diferentes personas en tu clase comenzaron dibujando diferentes ángulos y esto estaba escrito mucho antes que ninguno de ustedes dibujara sus diagramas.

No podíamos saber con anterioridad exactamente cómo luciría tu triángulo, pero predecimos que AD funcionaría para ti. He aquí cómo lo supimos:

> En tu diagrama, dibuja los segmentos BD y CD. Luego, marca como E el punto donde se cruzan AD y BC. Ahora tu diagrama debe verse como la Figura 2.49. Puede tornarse diferente y puede que sea más grueso o más delgado que nuestro diagrama, pero las letras te muestran cómo tu diagrama debe ser igual que el nuestro.
>
> ¿Te acuerdas como se construyó el punto D? ¿Qué garantiza que BD y CD tengan la misma longitud? Ahora observa los otros lados del ΔABD y el ΔACD. Los lados AB y AC tienen la misma longitud porque el triángulo original se hizo de esa manera, y el lado AD es común para ambos triángulos. Por consiguiente, para SSS, el ΔABD y el ΔACD son congruentes. Esto significa que

$$\angle BAD = \angle CAD$$

Figura 2.49

Esto es, AD divide al $\angle A$ exactamente por la mitad. Por eso AD se llama la **bisectriz del ángulo** $\angle A$.

Ahora observa nuevamente cómo AD divide el triángulo isósceles original, ΔABC, en el ΔABE y ΔACE. Los lados AB y AC son iguales en longitud (¿por qué?), y el lado AE es común para ambos triángulos. Sabemos que el $\angle BAD$ y el $\angle CAD$ tienen la misma medida (véase arriba), así que el ΔABE y el ΔACE deben de ser congruentes (¿por cuál principio de esta sección?). En otras palabras, AD es la línea de simetría para el triángulo isósceles original, ΔABC.

No hicimos todo ese trabajo sólo para convencerte de que teníamos la línea de simetría correcta desde el principio. Un resultado importante le sigue a lo que acabamos de hacer. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los dos lados iguales se llaman los **ángulos de base** del triángulo. En la Figura 2.49, los ángulos de base del ΔABC son los $\angle ABE$ y $\angle ACE$. Debido a que los dos triángulos formados por la bisectriz del ángulo son congruentes, nosotros sabemos que:
Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
Lo contrario de esta afirmación también es cierto. Eso es, que un triángulo que tiene dos ángulos iguales *debe* ser isósceles.
El ejercicio 5 al final de esta sección te pide que pruebes que esto es cierto. Piénsalo.

Estos datos sobre los triángulos isósceles aplican fácilmente al caso especial de triángulos equiláteros. Ya que los tres lados de un triángulo equilátero tienen la misma medida, podemos aplicar la idea de los ángulos con base igual, a los ángulos opuestos a cualesquiera dos lados. El hacer esto dos veces (con diferentes pares de lados) nos dice que todos los tres ángulos deben tener la misma medida. También puedes ver ésto a través de los tres ejes de simetría del triángulo. Ya que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180º, cada ángulo de un triángulo equilátero debe ser 60º.

Escribe una explicación detallada de por qué todos los tres ángulos de un triángulo equilátero deben ser iguales. Comienza con un triángulo equilátero, el ΔABC, y dirige al lector paso a paso a la conclusión de que el $\angle A = \angle B = \angle C$.

Un repaso de pruebas de congruencia para los triángulos.

- **SSS.** Si los tres lados de un triángulo tienen la misma longitud que los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- **SAS.** Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo tienen la misma medida que los dos lados y el ángulo incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- **ASA.** Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo tienen las mismas medidas que dos ángulos y el lado incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- **AAS.** Si dos ángulos y un lado que no está entre éstos en un triángulo tienen la misma medida que dos ángulos correspondientes y un lado correspondiente en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Conjunto de ejercicios: 2.7

1. Para cada parte,
   - Si piensas que los datos dados determinan un triángulo, dibújalo.
   - Si piensas que los datos dados pueden ser ciertos para más de un triángulo, dibuja por lo menos dos triángulos incongruentes que se ajusten a estos datos.
   - Si crees que ningún triángulo se ajusta a los datos dados, explica por qué.

   (a) Un triángulo con lados 4, 7, y 5 cm.
   (b) Un triángulo con lados 3, 4, y 7 cm.
   (c) Un triángulo con lados 5 cm. y 7 cm. y un ángulo de 30º.
   (d) Un triángulo rectángulo con dos catetos de 5 pulgadas.
   (e) Un triángulo rectángulo; dos de sus lados miden 8 cm. y 10 cm.
   (f) Un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 13 cm. y un ángulo de 50º.
   (g) Un triángulo isósceles que contiene ángulos de 50º y 80º y un lado de 12 cm.
   (h) Un triángulo isósceles que contiene ángulos de 50º y 60º y un lado de 10 cm.
   (i) Un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 15 cm.
2. Anteriormente en esta sección se te pidió que encontraras la distancia de una excursionista herida desde las torres del Monte Abraham y la Montaña Snow haciendo un dibujo a escala. Verifica los resultados de tu dibujo usando un sistema de coordenadas, escribiendo dos ecuaciones lineales para describir las líneas de visión de la excursionista a las torres, y usando la función de TRACE de tu calculadora gráfica para encontrar donde las líneas gráficas se cruzan.
3. ¿Cuán lejos estaba la estrella que viste anoche? No podemos viajar allá ni medir la distancia, así que tenemos que saber medirla desde aquí. *Podemos* medir el ángulo formado con la superficie de la Tierra cuando vemos la estrella y el ángulo formado nuevamente seis meses más tarde, cuando la Tierra se encuentra en el lado opuesto de su órbita. Estos dos puntos de la órbita de la Tierra y la estrella forman un triángulo isósceles (aproximadamente). Observa la Figura 2.50. La base de este triángulo grande mide alrededor de 186,000,000 de millas de lado a lado. Las órbitas son casi elípticas, así que la bisectriz de longitud cambia con el tiempo, pero podemos escoger el avistamiento por la cual es aproximadamente cierta. Entonces, usando ASA, podemos deducir que la distancia entre nuestro sistema solar y la estrella es como esto.

PICTURE

- Para una estrella en particular, supongamos que el ángulo en junio es 89.9999º. El ángulo medido en diciembre es 89.9999º. Fíjate que redondear estas medidas *no* es apropiado aquí.
- La distancia entre las medidas (a través de la órbita de la Tierra alrededor del sol) es 186,000,000 de millas. La mitad de esto (93,000,000 de millas) es la distancia de cualquier ángulo de base a la bisectriz perpendicular de la base. Esta distancia multiplicada por TAN de un ángulo (89.9999º en este caso) es la distancia perpendicular desde el centro de la base al vértice opuesto. Esa distancia perpendicular es la distancia entre nuestro sol y la estrella.

Angle in June = ángulo en junio
Angle in December = ángulo en diciembre

Distance between earth position 6 months apart: approximately 186,000,000 miles = la distancia entre la posición de la Tierra con 6 meses de separación: es aproximadamente 186,000,000 de millas.

Figura 2.50

(a) ¿Cuál es la distancia aproximada, en millas, entre nuestro sol y esta estrella?

(b) La luz puede viajar 5,865,696,000,000 millas en un año; esta longitud es llamada un **año luz**. ¿Cuántos años luz de distancia está nuestro sol de esta estrella?

(c) En junio o diciembre, aproximadamente, ¿a cuántas millas de distancia está la estrella de la Tierra? ¿A cuántos años luz?

(d) Vistas semejantes son tomadas de otra estrella, en diferentes meses (a medio año de separación). Cada ángulo es 89.99995º, y el diámetro de la órbita de la Tierra para estos meses es 184,000,000 de millas. En millas y en años luz, ¿cuán lejos está la estrella?

(e) Vistas semejantes son tomadas de una tercera estrella, en diferentes meses (a medio año de separación). Esta vez cada ángulo es 89.999992º y el diámetro de la órbita de la Tierra para estos meses es 183,000,000 de millas. En millas y años luz, ¿cuán lejos está la estrella?

PICTURE

4. Una noche en 1798, el corsario americano capitán Hardtack estaba navegando su embarcación, hacia el norte, paralelo a la costa este de la Florida española. Para evitar el riesgo de ser capturado por los españoles, él tuvo que mantenerse fuera de las aguas territoriales, las cuales se extendían tres millas desde la costa. Para revisar su localización, el capitán Hardtack divisó el faro en Lighthouse Point a un ángulo de 30º hacia el oeste de su curso. (Figura 2.51.) Una milla más adelante él vio el mismo faro en un ángulo de 36º al oeste de su curso. ¿Se encontraba él en aguas españolas o en aguas internacionales? ¿Cuán lejos de la costa estaba él?

Lighthouse Point
Florida
Chips course = curso de la embarcación
Mile = milla

Este dibujo no está hecho a escala.
Figura 2.51

5. Supongamos que tienes un triángulo, el ΔABC, en el cual el $\angle A = \angle B$. Justifica la afirmación de que el ΔABC debe ser isósceles. (*Pista*: Dibuja una bisectriz de ángulo y piensa sobre el principio AAS.)