

2.8 Otros polígonos

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Describir el tamaño y forma de un polígono usando la triangulación

Encontrar la suma de los ángulos interiores exteriores de cualquier polígono

Calcular las medidas de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos regulares.

Hay muchos tipos y formas diferentes de polígonos. Los más simples son los triángulos. Hasta ahora hemos dedicado dos secciones estudiándolos. ¿Te has preguntado por qué? La respuesta está en el capítulo 1 de este libro. ¿Recuerdas de lo que se trataba la triangulación? La idea principal es,

Cualquier región poligonal puede ser dividida en regiones triangulares no superpuestas al añadiéndole segmentos de líneas que no se intersecan entre los vértices del polígono.

1. **Dibuja un rectángulo de 2 pulgadas por 3 pulgadas. Triangúlalo en tantas maneras como puedas. ¿Cuántas maneras hay? ¿Cuántos triángulos consigues cada vez?**
2. **Dibuja un pentágono que se parezca al plato en un diamante de béisbol. Triangúlalo. ¿Cuántos triángulos consigues? ¿Cuántas triangulaciones diferentes hay del pentágono?**

| |
|-----------------------|
| Home Plate = plato |
|-----------------------|

Para mantener las cosas simples, observaremos principalmente polígonos sin ángulos reflejos (polígonos en el cual cada ángulo mide menos de 180°). Tales polígonos son llamados **convexos**. Eventualmente llegaremos a las fórmulas que aplican a *todos* los polígonos. Generalizando nuestro acercamiento para incluir polígonos que no son convexos será dejado como una pregunta de discusión para ti, más adelante.

Un polígono con más de tres lados se puede triangular en diferentes maneras. Pero no importa como lo hagas, el tamaño y la forma del polígono se determina por el tamaño y la forma de sus piezas triangulares. Si adjuntas a cualquier montura poligonal suficientes piezas diagonales cruzadas para triangularlas, la montura será rígida. En resumen, conocer sobre los triángulos te dice mucho sobre otros tipos de polígonos.

He aquí un ejemplo de cómo esto funciona. Recuerda la prueba de SSS para la congruencia: cuando sabes las longitudes de todos los tres lados de un triángulo, conoces su forma.

¿Piensas que hay una prueba SSSS para medir la congruencia de los cuadriláteros?

¿Qué significaría el decir que un cuadrilátero ha sido determinado por SSSS? Explica como la Figura 2.52 muestra como la “prueba SSSS” no funciona.



Figura 2.52

Como puedes ver, conocer la longitud de los cuatro lados no determina un cuadrilátero convexo. Puedes hacer muchas figuras diferentes con tan sólo cambiar los ángulos entre los lados. Pero, ¿que tal si *uno* de los lados es también fijo? ¿Es esta suficiente información para determinar el cuadrilátero? La respuesta es sí, como verás en la siguiente descripción.

Supongamos que conoces las longitudes de todos los lados de un cuadrilátero convexo $ABCD$, el orden en que ocurren, y la medida de un ángulo, digamos $\angle A$, en la Figura 2.53(a). ¡Entonces la triangulación muestra que las medidas de *todos* los otros ángulos han sido determinadas!

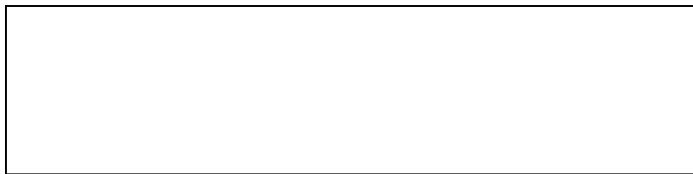


Figura 2.53

He aquí como hacerlo:

- Triangula $ABCD$ dibujando el segmento BD .
- Conoces las longitudes de los lados AB y AD y la medida del ángulo entre ellos, así que $\triangle ABD$ es determinado por SAS. Por lo tanto, la longitud de BD es determinada junto con las medidas de los $\angle ABD$ y $\angle ADB$. Estos están marcados como $\angle 2$ y $\angle 3$ en la Figura 2.53 (b).
- Ahora que ya conoces las longitudes de BD , BC y CD , el $\triangle BCD$ es determinado por SSS. Esto significa que las medidas de los $\angle BDC$, $\angle CBD$, y $\angle BCD$ han sido determinadas. Estas se han marcado como los $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$ en la Figura 2.53(c).
- Uno de los otros tres ángulos del cuadrilátero es el $\angle 6$. Las medidas de los otros dos surgen al sumar los $\angle 2 + \angle 4$ y $\angle 3 + \angle 5$. Esto significa que el cuadrilátero es determinado (hasta la congruencia).

Explica por qué un refuerzo diagonal fuerte a través de una esquina de una puerta de malla metálica hará que la puerta entera sea rígida.

- 1. Supongamos que conoces las longitudes de todos los lados de un pentágono y el orden en el cual ocurren. ¿Cuántos ángulos tienes que conocer para determinar el pentágono? ¿Uno? ¿Dos? ¿Más? Explica.**
- 2. Aquí hay un patrón, comenzando con los triángulos, siguiendo los cuadriláteros y luego los pentágonos. Menciona el próximo paso en el patrón tan precisamente como puedas. Luego trata de justificar tu afirmación.**

La triangulación nos lleva a otra propiedad interesante y útil de los polígonos. Conocemos que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180° . Podemos usar este dato y la triangulación para mostrar que la suma de los ángulos de un polígono se determina por la cantidad de sus vértices, de acuerdo a una fórmula simple.

- 1. Dibuja un pentágono convexo (el que quieras). Llama sus vértices A , B , C , D , y E . Luego triangula tu pentágono dibujando diagonales desde A . ¿Cuántos triángulos consigues?**
- 2. ¿Cuál es la suma de los ángulos en *todos* los triángulos? ¿Está cada uno de los ángulos de cada triángulo en un vértice del pentágono? ¿Cuál es la suma de los ángulos del pentágono?**
- 3. Dibuja un hexágono convexo (el que quieras). Llama sus vértices A , B , C , D , E y F . Luego triangula tu hexágono dibujando diagonales desde A . ¿Cuántos triángulos consigues?**
- 4. ¿Cuál es la suma de los ángulos en todos los triángulos? ¿Está cada uno de los ángulos de cada triángulo en un vértice del hexágono? ¿Cuál es la suma de los ángulos del hexágono?**

5. Supongamos que fueras a triangular un dodecágono convexo (un polígono de 12 lados) dibujando diagonales desde un vértice. ¿Cuántos triángulos conseguirías? ¿Cuál sería la suma de los ángulos del dodecágono?
6. ¿Puedes ver una fórmula general para la suma de los ángulos de un polígono de n -lados? Trata de escribir una tan precisa como puedas. Verifica tu fórmula para ver si se sostiene para los triángulos ($n = 3$) y los cuadriláteros ($n = 4$).

Observemos cuidadosamente las ideas principales detrás de las preguntas que acabas de trabajar.

- Cuando triangulas un polígono, cada ángulo de cada triángulo es parte de algún ángulo del polígono, y no se superponen. Entonces, la suma de los ángulos del polígono es la misma que la suma de los ángulos de *todos* los triángulos –la cantidad de triángulos por 180° .
- Si un polígono convexo es triangulado con diagonales desde un solo vértice, la cantidad de triángulos depende solamente en la cantidad de vértices, no en la forma del polígono.
- Desde un solo vértice, A , puedes dibujar diagonales a cada otro vértice excepto los dos vértices inmediatos en cada lado de A . Entonces, si el polígono tiene n vértices, puedes dibujar $n - 3$ diagonales. ¿Dibujaste tus 2 diagonales en tu pentágono y tres diagonales en tu hexágono?
- Según dibujas las diagonales desde A a los vértices sucesivos alrededor del polígono, cada uno corta un triángulo. La última diagonal dibujada corta su triángulo de un cuadrilátero, haciendo un triángulo adicional. En otras palabras, obtienes $n - 3$ triángulos (uno para cada diagonal) más uno más para un total de $n - 2$ triángulos. Juntando todas estas ideas, obtenemos:

Dato a conocer: La suma de los ángulos de un polígono de n – lados es $(n - 2) \square 180^\circ$.

.....

La fórmula de la suma de los ángulos es cierta para todos los polígonos de n – lados, pero nuestra explicación solo funciona para los polígonos convexos. ¿Cómo la justificación se puede extender para incluir polígonos no convexos?

(Pista: Trata de dibujar un ejemplo de un caso simple. ¿Puedes usar una diagonal para cortar un polígono que no es convexo en uno convexo? ¿Como la suma de los ángulos de los segmentos se relacionan a la suma de los ángulos de toda la figura?)

Por supuesto, los ángulos de los que hemos estado hablando son los que abren hacia adentro de un polígono. Estos se llaman los **ángulos interiores** del polígono. Cuando hablamos sobre la suma de los ángulos de un polígono, nos referimos a la suma de los ángulos interiores. Algunas veces es útil mirar al ángulo que se ha formado por un lado del polígono y la extensión de un lado próximo a él. Esto es llamado un **ángulo exterior**. (Figura 2.54)

| |
|--|
| Interior angle = ángulo interior Exterior angle = ángulo exterior |
|--|

Figura 2.54

Imagínate caminando sobre el perímetro de un polígono convexo. La medida de un ángulo exterior es la cantidad que tienes que virar cuando das la vuelta en la esquina del vértice. Por ejemplo, si estás caminando a lo largo del lado AB del pentágono en la Figura 2.55 (desde A a B), $\angle 1$ es la cantidad que tienes que virar para llegar al lado BC .

Supongamos que estás caminando a lo largo de un polígono convexo. Según vas alrededor de éste, ¿cuánto tienes que virar para llegar al lado donde comenzaste? Esto es, ¿cuál es la cantidad total de grados del viraje? ¿Importa la cantidad de vértices? La Figura 2.55 te puede ayudar a visualizarlo.

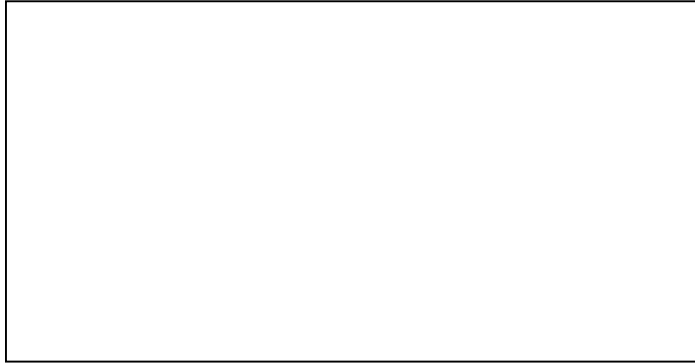


Figura 2.55

Si caminas alrededor de un bloque de la ciudad, haces cuatro virajes de 90° para regresar a la dirección original, un total de 360° . Si caminas un sendero poligonal convexo alrededor de una estatua, te toma la misma cantidad de virajes para llegar a tu dirección original, no importa a cuántas esquinas le des la vuelta. Esto debería hacer el siguiente dato fácil de recordar.

Dato a conocer: La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es 360° .

.....

He aquí una explicación más formal de la suma de los ángulos exteriores – una que no depende en imaginar si estás caminando alrededor de un diagrama. Los ángulos interiores y exteriores de un vértice son suplementarios (ver la Figura 2.54). Eso es, su suma es de 180° . Así que si sumamos los pares interiores-exteriores para todos los vértices de un polígono de n -lados, el total es $n \square 180^\circ$. Pero los ángulos interiores suman $(n - 2) \square 180^\circ$, así que los ángulos exteriores deben de sumar el resto. Eso es 360° , sin importar lo que n sea.

Si todos los lados de un polígono tienen la misma longitud y todos sus ángulos tienen la misma medida, llamamos a esto un polígono *regular*. Un triángulo equilátero es un ejemplo de un polígono regular.

1. **¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un triángulo equilátero? ¿Cuál es la medida de uno de sus ángulos exteriores? ¿Cómo lo sabes?**
2. **¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un cuadrado? ¿Cuál es la medida de uno de sus ángulos exteriores? ¿Cómo lo sabes?**

3. **¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un pentágono regular? ¿Cuál es la medida de uno de sus ángulos exteriores? ¿Cómo lo sabes?**
4. **¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un polígono regular con 100 lados? ¿Cuál es la medida de uno de sus ángulos exteriores? ¿Cómo lo sabes?**
5. **¿Qué patrones ves aquí?**

Dado que todos los ángulos interiores n de un polígono regular de n -lados deben ser iguales, la medida de cualquiera de ellos se puede encontrar dividiendo la suma de los ángulos interiores por n . Eso es,

La medida de un ángulo interior de un polígono regular

$$n - \text{gon} = \frac{(n - 2) \square 180^\circ}{n}$$

Dado que todos los ángulos exteriores n de un polígono regular de n -lados deben ser iguales, la medida de cualquiera de ellos se puede encontrar dividiendo la suma de los ángulos exteriores por n . Eso es:

$$\text{La medida de un ángulo exterior de un polígono regular } n - \text{gon} = \frac{360^\circ}{n} .$$

La Figura 2.56 es una ilustración de un libro de carpintería. ¿Cómo los cortes de ángulos mostrados se relacionan a sus figuras geométricas correspondientes? ¿Cómo están relacionados a los ángulos interiores o exteriores?

Configuraciones de cajas de inglete, izquierda y derecha, para hacer varias construcciones geométricas (Herramientas Stanley)

3 sides = 3 lados
 4 sides = 4 lados
 5 sides = 5 lados
 6 sides = 6 lados
 8 sides = 8 lados
 12 sides = 12 lados

De Rosario Capatosto, *Complete Book of Woodworking*,
 (New York: Harper & Row, 1975), p. 203.

Figura 2.56

Un repaso de hechos importantes.

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n – lados es

$$(n - 2) \square 180^\circ$$

La medida de un ángulo interior de un n – gon regular es

$$n - \text{gon} = \frac{(n - 2) \square 180^\circ}{n}$$

La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es 360° .

La medida de un ángulo exterior de un n –gon regular es $\frac{360^\circ}{n}$.

Conjunto de ejercicios: 2.8

1. La Figura 2.57 muestra la longitud de los cuatro lados de un cuadrilátero $ABCD$. Para cada uno de los siguientes tamaños para el $\angle B$, dibuja el cuadrilátero $ABCD$:

- (a) 45° (b) 90° (c) 120° (d) 30° (e) 60° (f) 10°

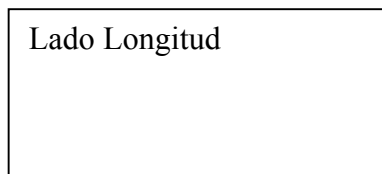
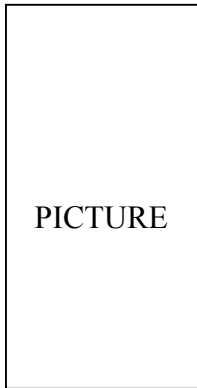


Figura 2.57

2. La Figura 2.58 es una tabla de las medidas de los ángulos de polígonos regulares. Cópiala y complétala.

| Numero de lados n | Suma de ángulos interiores | Suma de ángulos exteriores | Medida de un ángulo interior | Medida de un ángulo exterior |
|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 10 | | | | |
| 12 | | | | |
| 16 | | | | |
| 17 | | | | |
| 24 | | | | |

Figura 2.58



3. Un patrón común de bolas de balompié es un pentágono regular negro rodeado por cinco hexágonos regulares blancos.
 - (a) Dibuja este patrón.
 - (b) ¿Cuál es la proporción de hexágonos a pentágonos en este patrón?
 - (c) Consigue una bola de balompié para examinarla. ¿Cuántos pentágonos negros hay en la pelota? ¿Cuántos hexágonos blancos hay en la pelota?
 - (d) ¿Cuál es la proporción de hexágonos blancos a pentágonos negros en la pelota? ¿Por qué no es la misma respuesta que en la parte (b)?
 - (e) ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores de todos los pentágonos negros en la pelota?
 - (f) ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores de todos los hexágonos blancos en la pelota? ¿Cuál es la proporción de este número para tu respuesta de la parte (e)?
 - (g) Cuando divides la proporción en la parte (d) por la proporción en la parte (f), ¿qué número obtienes? ¿Cómo se relaciona esto a la suma de los ángulos de un pentágono y un hexágono? ¿Es esto una coincidencia? Explica.
4. Los polígonos que no son convexos se llaman cóncavos. Escribe una definición directa de *polígono cóncavo* en términos de la medida de un ángulo.
5. El parque Fenway, la casa de los Medias Rojas de Boston, es un parque de pelota único construido en el año 1912. A diferencia de muchos de los parques modernos, no es simétrico en el diseño en su campo de juego, mostrado en la Figura 2.59. Puede que sea posible cubrir el campo de juego completo (ambos el cuadro interior y los jardines) cuando llueve, usando un plástico liviano, fuerte, pero costoso. Para estimar el precio de tal cubierta, el encargado del mantenimiento del parque necesita una aproximación cercana del área del terreno de juego.
 - (a) Explica cómo el encargado de mantenimiento del parque podría utilizar lo que has aprendido sobre los polígonos para calcular el área del terreno de juego del parque de Fenway.
 - (b) ¿Te proviene suficiente información las medidas mostradas en la Figura 2.59 para determinar el área del terreno de juego? Si es así, hazlo. Si no, describe qué otras medidas necesitas.

Left field = jardín izquierdo
Center field = jardín central
Right field = jardín derecho
Home plate = plato

Parque de Fenway

Todas las medidas mostradas son distancias directas desde el plato.

Figura 2.59

6. ¿Por qué piensas que limitamos nuestra explicación de ángulos exteriores a polígonos convexos? ¿Cómo puedes cambiar la explicación para que la suma de un ángulo exterior de *cualquier* polígono sea igual a 360° ? Escribe uno o dos párrafos explicando tus pensamientos sobre esto.

PICTURE