# 2.9 Estirando y encogiendo ángulos y áreas

**Logros del aprendizaje**

Después de estudiar esta sección, podrás:

Usar el hecho de que la escala conserva el tamaño del ángulo y explicar porque es cierto

Usar el hecho de que dos triángulos con los ángulos congruentes correspondientes deben ser semejantes

Calcular el área de una figura a escala de su área original y el factor de escala

Encontrar el factor de escala de una figura a escala de su área original y el área de escala.

En este capítulo hemos estado hablando sobre escalas y ángulos. ¿Piensas que la escala cambia los tamaños de los ángulos?

**En la Figura 2.60, el $\Delta A$ y el $\Delta B$ son semejantes.**

1. **¿Cuál es el factor de escala? Toma algunas medidas.**
2. **¿Cuáles son las medidas de las pendientes del $\angle 1$ y $\angle 2$? ¿Cómo están relacionados?**

Figura 2.60

La escala siempre conserva el tamaño del ángulo. Para ver porque debe de ser cierto esto, piensa en términos de la medida de la pendiente. Cuando dos figuras son semejantes, hay un factor de escala, *k*, para que cada longitud en una figura sea *k* veces la longitud correspondiente en la otra. Ahora, la medida de la pendiente de un ángulo es la proporción de dos longitudes, es decir $\frac{a}{b}$. Entonces, la medida de la pendiente del ángulo correspondiente en la figura similar es $\frac{ka}{kb}$ como en la Figura 2.61. Pero $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$, así que el tamaño del ángulo debe ser igual en ambas figuras.

Scaling factor [*k*] = factor de escala [*k*]

Figura 2.61

**Dato a conocer:** Los ángulos correspondientes de polígonos similares son congruentes.

…………………………………………………………………

**El dato anterior se puede expresar de la siguiente manera:**

**Si dos polígonos son similares, entonces, sus ángulos correspondientes deben ser congruentes.**

**¿Cuál es lo contrario de esta afirmación? Provee un ejemplo para mostrar que lo contrario *no* es cierto.**

En general, dos polígonos con ángulos congruentes pueden o no ser similares. Sin embargo, para los triángulos la situación es más predecible.

**Dato a conocer: (AAA)** Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son similares.

…………………………………………………………………

Frecuentemente la afirmación de AAA se combina con su contrario (el cual es cierto para todos los polígonos) en esta forma:

**Dos triángulos son similares sí y solo sí sus ángulos correspondientes son congruentes.**

**¿Determinan dos ángulos la forma del triángulo? En particular, ¿son todos los triángulos que contienen ángulos de 50º y 75º similares? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Determina un ángulo la forma de un triángulo? ¿Por qué sí o por qué no?**

Los datos anteriores acerca de los ángulos dependen en conocer que si $k$ es el factor de escala relacionando alguna figura $A$ a una figura $B$ similar, entonces cada longitud en $B$ es $k$ veces la longitud correspondiente en $A$. Por ejemplo, si un lado de $A$ tiene 3 unidades de longitud, entonces, el lado correspondiente de $B$ es $3k$ unidades de longitud. ¿Pero qué tal el área? El área de una figura es medida en unidades *cuadradas*, no lineales. ¿Afecta el factor de escala las áreas de una manera predecible? Si es así, ¿cómo? El siguiente ejemplo debe de ayudarte a ver las respuestas a estas preguntas.

**La estrella de cine Mónica Rich ha colocado losetas en el patio que mide 8 por 12 pies al lado de su piscina con el patrón mostrado en la Figura 2.62. Utilizó dos tipos de losetas hechas a la medida. La que no tienen adornos son de un color sólido dorado y las otras tienen un signo de dólar verde. Cada loseta mide un pie cuadrado y cuesta $100 con o sin instalación.**

1. **¿Cuánto costaron las losetas para el patio de Mónica? ¿Cuántas losetas se usaron?**

PICTURE

**La vecina de Mónica, Glenda Greenback, decidió construir un patio mucho más grande. Puesto que ella piensa que es tres veces más rica que Mónica, ella está planificando construir un patio tres veces más largo y tres veces más ancho usando exactamente los mismos tipos de losetas y el mismo patrón para cubrirlo.**

2. **¿Cuál es la dimensión del patio de Glenda?**
3. **Los dos patios rectangulares son similares. ¿Cuál es el factor de escala?**
4. **¿Cuánto costarán las losetas del patio de Glenda? ¿Cuántas losetas se usarán?**
5. **¿Gastará Glenda tres veces más que Mónica para las losetas del patio? Explica.**

Tiles - Losetas

Figura 2.62

La historia de los patios de Mónica y Glenda ilustra un simple, pero *muy* importante, principio de escala.

Si una región está en escala por un factor de $k$, su área cambia por $k^2$.

Esto es, si todas las distancias lineales de alguna figura *A* están a escala por un factor de *k* para obtener una figura *B* similar, entonces cualquier área incluida por *B* es $k^2$ veces el área correspondiente incluida por *A*. Veamos por qué esto debe de ser siempre cierto.

El área es medida en unidades cuadradas. Una vez has escogido una unidad de longitud, puedes pensar en el área de cualquier región como si estuviera hecha de pequeñas losetas cuadradas de 1 por 1 (y pedazos de losetas). Puedes encontrar el área aproximada de la región solamente contando los cuadrados. Puedes hacer una mejor aproximación al escoger un tamaño de unidad más pequeño. Ahora, ¿qué le sucede al tamaño de un cuadrado si lo escalas por un factor de *k*?

**Cada lado del cuadrado *A* en la Figura 2.63 tiene una pica de largo. Una pica es una unidad de longitud utilizada por impresores. Todos los cuadrados en esta figura son similares a *A*. ¿Por qué?**

1. **Enumera los cuatro factores de escala usados para obtener los cuadrados en *B, C, D* y *E* desde *A*.**
2. **Enumera las áreas de los cuadrados *B, C, D y E*, en picas cuadradas.**
3. **¿Cómo están los números que listaste en el parte 2 relacionados a los números listados en el parte 1?**
4. **Si tuvieras que añadir otro cuadrado, *F*, siguiendo el patrón de la Figura 2.63, ¿cuál sería la longitud de sus lados? ¿Cuál sería su área?**

Figura 2.63

La Figura 2.63 muestra como el área de un cuadrado es afectada por la escala. El álgebra nos permite expresar este principio de una manera que se extiende fácilmente a los rectángulos y triángulos. El área de un cuadrado con un lado de longitud *s* es $s^2$. Si el cuadrado es escalado a un factor *k*, entonces el cuadrado nuevo tiene una longitud de lado *ks*, así que su área es $(ks)^2$. Pero $(ks)^2 = k^2s^2$, el cual es solamente $k^2$ veces el área del cuadrado original.

Los rectángulos están sujetos al mismo razonamiento. Si un rectángulo tiene una longitud *l* con un ancho *w*, entonces, el área interior es *lw*. Ahora, si ese rectángulo está escalado por un factor *k*, entonces la nueva longitud y anchura son *kl* y *kw*, respectivamente. Así, el área interior de un rectángulo escalado es

$$(kl)\,(kw) = k^2 \cdot lw$$

el cual es $k^2$ veces el área del rectángulo original.

1. **Escribe una formula para el área de un triángulo con una base *b* y una altura *h*.**
2. **Adapta el razonamiento de los rectángulos para explicar, si un triángulo es escalado a un factor *k*, entonces el área del triángulo a escala es $k^2$ veces el área del original.**

¿Qué tal las regiones que no están bien formadas como los rectángulos o los triángulos? ¿Cómo sabemos que se mantiene el mismo principio? Para regiones poligonales, hay dos maneras de contestar esto. La primera usa la triangulación. Ya que cualquier polígono se puede triangular y ya que el área de cualquier triángulo escalado es cambiado por el cuadrado de un factor de escala, entonces, el área de cualquier región triangulada escalada debe también cambiar por el cuadrado del factor de escala.

**Escribe una explicación clara y detallada de cómo la triangulación hace que el principio de escala de área sea cierto para cualquier región pentagonal. En alguna parte de tu explicación debes necesitar usar una forma de la ley distributiva; asegúrate de decir claramente dónde y cómo la usas.**

El segundo enfoque aplica a cualquier región plana ya sea definida o no por un polígono. Recuerda del capítulo 1 que podemos aproximar el área de cualquier región plana por medio de un encasillado de cuadros. Ahora, si escalamos la región por un factor *k*, entonces los lados de cada cuadro son escalados por *k*, así que el área de cada cuadro cambia por $k^2$. Esto significa que el área de la aproximación entera cambia por el factor $k^2$.

Por ejemplo, el área dentro de un hexágono irregular en el lado izquierdo de la Figura 2.64 está aproximada por 16 cuadrados. El hexágono similar a la derecha ha sido escalado por un factor de 2. Esto significa que el área de cada uno de los cuadrados originales ha sido expandida 4 veces su tamaño original, así que el hexágono derecho contiene un área 4 veces más grande que el de la izquierda.

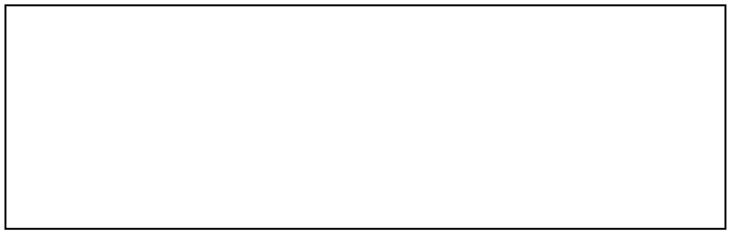


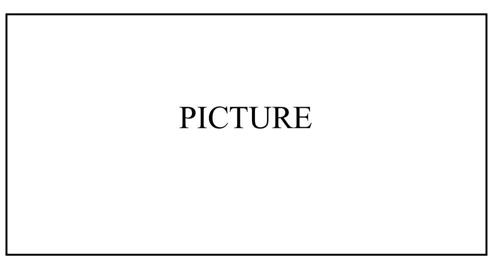
Figura 2.64

Si hacemos mejores aproximaciones al escoger cuadrados cada vez más pequeños, el factor $k^2$ aplica cada vez, así que el área de la región debe cambiar por el factor $k^2$.

**Dato a conocer:** Si una región plana es escalada por un factor $k$, entonces el área de la región escalada es $k^2$ veces el área de la región original.

Si sabes cómo el área de una figura se debe cambiar escalándola, ¿puedes encontrar el factor de escala necesario? Sí, puedes. ¿Necesitarás alguna vez hacer eso? Puede que sí. Aquí hay un ejemplo de tal situación:

Los fabricantes de veleros Easylife Watercraft Corp. han diseñado un velero en la forma de un triángulo rectángulo con un cateto de $1\frac{1}{2}$ veces tan largo como el otro. Ellos pueden construir este velero en una variedad de tamaños diferentes. Los tamaños están basados en el área (porque el área de la vela determina la resistencia del viento). Su prototipo (modelo) mide 4 pies por 6 pies, con un área de 12 pies cuadrados. El diseñador del bote en la próxima oficina necesita velas de esta forma con áreas de 75 pies cuadrados, 84 pies cuadrados y 93 pies cuadrados, para los tres diferentes estilos de un bote nuevo. ¿Cuáles son las dimensiones requeridas para estas velas? ¿Cómo puedes ayudar a los fabricantes de veleros a encontrarlas?



Tratando diferentes longitudes para ver si ellas se ajustan a todas las condiciones, podría funcionar, si tienes suerte, pero podría tomar mucho tiempo. Hay una manera más rápida y fácil, si usas un poco de álgebra. Los fabricantes de veleros necesitan un factor de escala para usar en cada caso. Ahora, para cualquier factor de escala $k$, sabemos que el área original, $A_0$, está relacionado al área escalada, $A_s$, como la siguiente,

$$A_s = k_2 \cdot A_o$$

En este caso, el área original es 12 pies cuadrados. El área escalada es lo que el diseñador quiere; en el primer caso, es 75 pies cuadrados.
Entonces, tenemos

$$75 = k^2 \cdot 12$$

así que

$$\frac{75}{12} = k^2$$

Eso es,

$$k = \sqrt{\frac{75}{12}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Actualmente, hay dos raíces cuadradas de $\frac{25}{4}$, una positiva y una negativa. Queremos la positiva aquí porque el factor de escala debe ser positivo.

**Estas preguntas hacen referencia al problema del fabricante de veleros:**

1. **¿Cuáles son las dimensiones de la vela con un área de 75 pies cuadrados? ¿Cómo las encontraste?**
2. **Encuentra las dimensiones de las velas con áreas de 84 pies cuadrados y 93 pies cuadrados. Usa tu calculadora, y redondea las respuestas a dos lugares decimales.**
3. **Escribe la fórmula para encontrar el factor de escala como una función del área que se necesita. Éntrala en tu calculadora. ¿Qué significa la X? ¿Qué significa la Y?**
4. **Usa la función del ejercicio 3 para que te ayude a encontrar las dimensiones de una vela con un área de 100 pies cuadrados.**

**Un repaso de datos importantes.**

- Los ángulos correspondientes de polígonos similares son congruentes.
- (**AAA**) Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, entonces, los triángulos son similares.
- Si una región plana es escalada por un factor $k$, entonces, el área de la región escalada es $k^2$ veces el área original de la región.

**Conjunto de ejercicios: 2.9**

**1.** Mathland tiene un concurso para escoger el diseño de una estampilla triangular en honor a Pitágoras. Todos los diseños deben estar incluidos en triángulos rectángulos con lados de longitudes de 24 cm., 32 cm. y 40 cm. Cuando se emite la estampilla, la longitud actual de los lados del triángulo tendrán $\frac{1}{8}$ de la longitud de los diseños. Copia y completa la tabla en la Figura 2.65. Luego contesta las siguientes preguntas.

**(a)** ¿Cómo se compara el perímetro del diseño al perímetro de la estampilla actual?

**(b)** ¿Cómo se compara el área del diseño con el área de la estampilla actual?

**(c)** ¿Por qué piensas que Mathland escogió un triángulo rectángulo con las longitudes de lados de 24 cm., 32 cm. y 40 cm?

**(d)** ¿Ha emitido los Estados Unidos alguna vez una estampilla triangular? Si es así, ¿cuándo? ¿Han emitido otros países una estampilla triangular? Si es así, ¿puedes nombrar alguno?

Design – diseño
Actual – actual
Side lengths – longitud de los lados
Perimeter – perímetro
Area – área

Figura 2.65

**2.** Este problema se refiere a los dos patios de las piscinas descritas en esta sección. Cuado Glenda Greenback diseñó su patio 3 veces más largo y 3 veces más ancho que el que tenía Mónica Rich, ella encontró que las losetas le costarían 9 veces más que a Mónica. ¿Por qué? ¿Cómo Glenda puede cambiar su diseño para que las losetas solamente le cuesten (alrededor) de 3 veces más y que el patio siga siendo proporcional al de Mónica?
¿Qué dificultades prácticas son causadas por tu solución al enlosar?

PICTURE

**3.** Los cometas se consiguen en todas las formas y tamaños, pero cualquier buen diseño de cometa hace uso de este importante principio de aerodinámica:

Para una velocidad de viento dada, la elevación (fuerza del aire que eleva el cometa) es directamente proporcional al área del cometa. Si el área de un cometa se duplica, entonces su elevación se duplica.

Un diseño de cometa típico tiene la forma de dos triángulos isósceles, uno apuntando hacia arriba y uno apuntando hacia abajo, con una línea de base común, como se muestra en la Figura 2.66. En este caso, la base tiene 10 pulg., la altura del triángulo de arriba es 6 pulg., y la altura del triángulo de abajo es 8 pulg. Haz una copia de la tabla en la Figura 2.67 para usarla como tu respuesta a las partes (a) – (d).

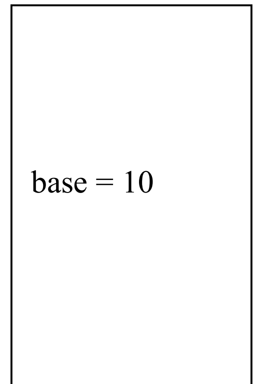



Figura 2.66

| | **Triángulo de arriba** | | | **Triángulo de abajo** | | | **Área** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Base** | **Altura** | **Área** | **Base** | **Altura** | **Área** | **total** |
| (a) | | | | | | | |
| (b) | | | | | | | |
| (c) | | | | | | | |
| (d) | | | | | | | |

Figura 2.67

**(a)** Llena todos los blancos en la línea (a) para encontrar el área total del cometa.

**(b)** ¿Qué le sucede al área total del cometa cuando duplicas todas las dimensiones? Completa toda la línea (b) para contestar esta pregunta.

**(c)** Dada el área de la porción de abajo del cometa y el área total, como se muestra en la línea (c), completa la línea (c).

**(d)** Dada el área de la porción de arriba del cometa, calcula el área de la porción de abajo y el área total. Completa la línea (d).

PICTURE

Como ejemplo de cómo esta información puede ser usada, digamos que para una velocidad de viento dada, la fuerza de elevación para el cometa descrito por la línea (a) es $\frac{1}{4}$ libra. Debido a que las dimensiones del cometa en (b) nos da cuatro veces el área, la fuerza de elevación es cuatro veces esa de (a). En otras palabras, el cometa (b) levantará una libra con la misma velocidad de viento.

**(e)** Calcula la elevación, en libras, de los cometas descritos por las líneas (c) y (d).

**(f)** Diseña un cometa con las mismas proporciones, que pueda levantar un cuerpo humano pesando 100 libras para esta misma velocidad de viento. Encuentra la longitud de la base y las dos alturas.

**4.** Estas ayudando a diseñar un teatro de conciertos grande y al aire libre, Triangle Wood en Massachussets. Su plano de construcción es un triángulo equilátero grande, como se muestra en la Figura 2.68. Las longitudes en la figura están dadas en yardas. El triángulo en el fondo es el escenario y el área de luces. Los asientos están en tres secciones, alejándose del escenario de manera tal que cada sección y el escenario y cualesquiera secciones antes de éste formen un triángulo semejante al triángulo del escenario. Las secciones de los asientos tiene costos dependiendo de la distancia que tienen desde el escenario, con los boletos más caros en la sección 1, luego la sección 2 y los boletos más baratos para la sección 3.

Teatro TriangleWood

section = sección

stage = escenario

Figura 2.68

**(a)** Tres de las longitudes en la Figura 2.68 están marcadas con "?". ¿Cuáles son? Recuerda: cada uno de los siguientes triángulos es equilátero:

Sección 1 + escenario
Sección 2 + sección 1 + escenario
Sección 3 + sección 2 + sección 1 + escenario

Para completar el diseño de este teatro, comienza copiando la tabla en la Figura 2.69. Luego llénala paso a paso como trabajarías a través de las partes (b) – (h).

| | Área (pie cuadrado) | Núm. de asientos | $ por asiento | Total $ |
|---|---|---|---|---|
| Escenario | | 0 | 0 | 0 |
| Sección 1 | | 1350 | $14 | |
| Sección 2 | | | | |
| Sección 2 | | | | |
| Total: | | | | |

Figura 2.69

**(b)** Encuentra el área del escenario. Redondea tu respuesta a dos lugares decimales.

**(c)** Calcula el área total del teatro escalando tu respuesta a la parte (b).

**(d)** Usa la escala y la respuesta de la parte (b) para encontrar el área de cada sección de asientos. (*Pista*: El área de la sección 1 es el área del triángulo equilátero compuesto por la sección 1 y el escenario, menos el área del escenario.) Verifica tus resultados al comparar la suma de las áreas con la respuesta a la parte (c).

**(e)** Si la sección 1 tiene 1,350 asientos, calcula la cantidad de asientos en la sección 2 y la sección 3, usando proporcionalidad y asumiendo que cada asiento requiere la misma área, ¿cómo redondearías tus respuestas?

**(f)** Encuentra la cantidad total de asientos en este teatro.

**(g)** La gerente quiere un teatro lleno para traer la misma cantidad de dinero en los boletos de entrada para cada sección. Si ella cobra una tarifa de $14 por asiento de la primera sección, ¿cuánto cobra por un asiento en la sección 2? ¿Cuánto cobra por un asiento en la sección 3?

**(h)** Si un concierto está vendido completamente, ¿cuánto es el dinero total que el teatro recolecta?