Introducción a la trigonometría: Enredos con los ángulos

Capítulo 3

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Escribir la definición del seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo como una proporción

Usar una calculadora para encontrar el seno de un ángulo agudo

Usar el seno de un ángulo agudo como una herramienta para solucionar problemas

Explicar cómo estimar el radio de la Tierra.

3.1 El seno de un ángulo agudo

¿Haz volado un cometa alguna vez? Si es así, ¿alguna vez te preguntaste cuán alto estaba el cometa sobre el suelo?

Betty y Jake están en la playa volando cometas.

PICTURE

Betty tenía 200 pies de cuerda y ya no le queda ninguna. Jake tenía 150 pies de cuerda y no le queda ninguna. Un amigo estimó los ángulos que las cuerdas formaron con el suelo para cada persona (Figura 3.1).

ft. = pies

Cometa de Jake

Cometa de Betty

Figura 3.1
Algunas figuras en este capítulo podrían no estar a escala.

¿Cuál de los cometas piensas es más alto, el de Jake o el de Betty? ¿Por qué?

PICTURE

Determinar la altura de un cometa puede ser un asunto serio, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Los humanos han aprovechado exitosamente la fuerza del viento para muchos propósitos a través de los años. La fuerza del viento está siendo utilizada nuevamente como una fuente de energía renovable. En las Montañas Tehachapi de California, el viento está siendo capturado por los molinos de viento y usado para crear electricidad. Un problema que tienen los científicos al hacer buen uso del viento es encontrar cuán alto deben instalar los molinos de viento. Una manera fácil para encontrar a qué altitud el viento es más fuerte es volando un cometa y midiendo cuánta fuerza hay en la cuerda. Pero, ¿cómo uno determina la altitud del cometa? Midiendo el ángulo que forma la cuerda con el suelo les permite calcular la altura del cometa. Mientras más grande el jalón en la cuerda, más fuerte el viento.

He aquí un problema típico que un “buscador de viento” necesitaría resolver: un ingeniero está volando un cometa para medir la fuerza del viento y suelta 39 pies de cuerda. Asumiendo que la cuerda está en una línea recta y ésta forma un ángulo de 40º con el suelo, calcula la altura del cometa.

Dos estudiantes, Rashad y Rolena, recuerdan que estudiaron *escalas* en **MATH** *Connections* y decidieron solucionar este problema usando un diagrama de escala. Rashad decide usar una escala de 1 pulgada por cada 10 pies y dibuja un diagrama como el de la Figura 3.2(a). Él determina que la longitud de AC debería ser

$$\frac{39}{10} = 3.9 = 3\frac{15}{16} \text{ pulgadas}$$

Luego él dibuja *CB* perpendicular al suelo (*AB*) y mide la longitud de *BC*.

La escala de Rashad – 1 pulgada = 10 pies
(a)

La escala de Rolena – 1 pulgada = 7.5 pies
(b)

Figura 3.2

1. **Dibuja un triángulo rectángulo como la Figura 3.2(a) con un ángulo de 40º y una hipotenusa de pulgadas. ¿Cuál es la longitud de *BC* en pulgadas?**

2. **Usando la escala de Rashad, ¿cuál es tu estimado para la altura del cometa?**

Rolena usa un método semejante, pero escoge una escala de 1 pulgada para cada 7.5 pies (Figura 3.2(b)).

1. **Usando la escala de Rolena, dibuja un triángulo adecuado. Usando este triángulo, ¿cuál es tu estimado para la altura del cometa?**
2. **¿Obtuviste la misma respuesta a cuando usaste la escala de Rashad? Explica**
3. **Encuentra la proporción de *BC* a *AC* para tu triángulo basándote en la escala de Rashad, y luego para tu triángulo basándote en la escala de Rolena. ¿Obtuviste el mismo resultado? Explica**

La idea clave aquí es que los triángulos que has dibujado son semejantes y consecuentemente las proporciones de los lados correspondientes siempre serán iguales. Lo que esto significa es que para *cualquier* triángulo rectángulo con un ángulo midiendo 40º la proporción de sus lados será la misma.

DRAWING

Figura 3.3

Como ves en la Figura 3.3, todos los triángulos rectángulos envueltos son también semejantes, así que las siguientes proporciones de longitudes son iguales.

EQUATION

Para un ángulo de 40º, los matemáticos han encontrado que esta proporción es 0.643 (a tres lugares decimales). ¿Está este número de acuerdo con (o se acerca a) tus proporciones de los triángulos de Rashad y Rolena? Esta proporción es llamada el seno de 40º y se escribe seno 40º.

Encontrarás una tecla SIN en tu calculadora y verás cómo esta tecla puede ayudar a solucionar muchos problemas sin usar cualesquiera diagramas de escala. Por ejemplo, el problema del buscador de viento podría ser solucionado simplemente notando en la Figura 3.4 que

$$\frac{opuesto}{hipotenusa} = \text{seno } 40^{\circ} \qquad = 0.643$$

$$\frac{BC}{39} = \text{seno } 40^{\circ} \qquad = 0.643$$

o en multiplicación cruzada

$$BC \qquad = 39(0.643) \qquad = 25.077$$

para que el cometa esté alrededor de 25 pies de altura.

hypothenuse = hipotenusa

opposite = opuesto

ft. = pies

Figura 3.4

El mismo procedimiento aplica a cualquier ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo (Figura 3.5). El **seno** de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo es la proporción de la longitud del lado opuesto a θ a la longitud de la hipotenusa. Esto es,

$$\text{seno}\ \theta = \frac{\textit{lado opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$

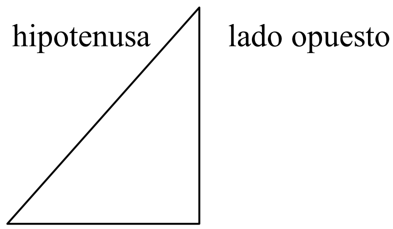


Figura 3.5

Símbolos

La letra griega θ, leída *theta* (zeta), es frecuentemente usada en libros de matemáticas para indicar ángulos. Otras letras griegas que son usadas, incluyen α, leída *alfa*, y β, leída *beta*.

El propósito de esta sección es hacerte consciente de cómo esta proporción del seno θ puede ser usada para solucionar muchos problemas de medidas.

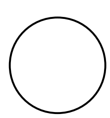
Todo el mundo sabe cómo luce una pelota. La palabra *pelota* puede que te traiga a la mente una pelota de béisbol, una pelota de baloncesto o una bola de boliche.

PICTURE

La Tierra vista desde una nave espacial, luce como una pelota.

PICTURE

Es probable que hayas visto fotografías desde una nave espacial, en la televisión o en revistas. Una pelota es también llamada una *esfera*, y el borde de la vista de una esfera o pelota luce como un círculo.



Este círculo tiene un radio r el cuál es también el radio de la esfera a la cual está relacionada.

1. **¿Cómo medirías el radio de una pelota de béisbol?**
2. **¿Cómo medirías el radio de la Tierra?**

Es interesante conocer que hace más de 2,000 años, el astrónomo griego llamado Hipparchus hizo un buen estimado del radio de la Tierra. Él usó las siguientes ideas para estimar el radio de la Tierra: escala una montaña, digamos de cinco millas de alto, hasta el punto A y mira hacia el horizonte al punto B, como en la Figura 3.6. Él sabía que el triángulo ABC era un triángulo rectángulo. Puedes aprender por qué éste es un triángulo rectángulo en el **Conjunto de ejercicios**.

DRAWING

Figura 3.6

Veamos el ABC después que ha sido virado, agrandado y puesto en la posición mostrada en la Figura 3.7

DRAWING

Figura 3.7

Usando instrumentos, el $\angle CAB$ fue medido para ser aproximadamente 87.15º. Basándote en las ideas de nuestro ejemplo anterior, deberías de ver que

$$\text{seno } 87.15^\circ = \frac{r}{r+5}$$

o usando una calculadora hasta cinco lugares decimales,

$$0.99876 = \frac{r}{r+5}$$

Como resultado de la multiplicación cruzada, uno obtiene

$$0.99876\ (r + 5) = r$$

ó

$$0.99876\ r + 4.99380 = r$$

ó

$$0.00124\ r = 4.99380$$

entonces

$$r = 4027.258065 \text{ millas}$$

Esto es, el radio de la Tierra es aproximadamente 4,027 millas.

Asumiendo un radio de 4,027 millas, ¿cuál es la circunferencia de la Tierra en el Ecuador, asumiendo también que la Tierra es redonda?

Julio Verne escribió el libro *Alrededor del mundo en ochenta días* en 1873. Los viajeros del libro no viajaron a través del Ecuador. Sin embargo, supongamos que sí viajaron alrededor del Ecuador. ¿Qué velocidad promedio, en millas por hora, tienen que haber mantenido para poder ir alrededor del mundo en ochenta días? ¿Cuáles eran las maneras más rápidas para viajar en 1873? No es inusual para los aviones a reacción el mantener una velocidad promedio de 550 millas por hora, aún con reabastecimiento de combustible. ¿Cuánto tiempo le tomará a dicho avión ir alrededor de la Tierra? ¿Importa si el avión está volando alrededor de 6 millas sobre la Tierra?

PHOTO

Conjunto de ejercicios: 3.1

Los ejercicios 1-7 te ayudará a familiarizarte en como calcular el seno de un ángulo usando tu calculadora. Para cada figura, encuentra el valor de *x* hasta dos lugares decimales.

Exercises 1-7

8. John, un estudiante en la Escuela Bates, dice que la figura en el problema 7 representa la torre inclinada de Pisa. ¿Está John en lo correcto?
9. En tu calculadora, presiona SIN 0 ENTER. ¿Puedes explicar la respuesta? ¿Qué sucede cuando tomas el seno de los ángulos que son mayores que, pero cercanos a 0º?
10. En tu calculadora, presiona SIN 90 ENTER. ¿Puedes explicar la respuesta? ¿Qué sucede cuando tomas el seno de los ángulos que son menores que, pero cercanos a 90º?
11. Encuentra el valor de *r* en la Figura 3.8.

PICTURE

Figura 3.8

12. Para poder estimar el radio de la Tierra, una persona escaló una montaña de 4 millas de alto y encontró que el $\angle CAB$ en el diagrama de abajo mide 87.4º.

DRAWING

Figura 3.9

¿Cuál estimado del radio de la Tierra consiguió esta persona? ¿Hay una montaña en algún lugar en el mundo la cuál tiene una altura de 4 millas sobre la Tierra (nivel del mar)?

13. **(a)** ¿Cuál es el área del paralelogramo en la Figura 3.10(a)?

DRAWINGS

Figura 3.10

(b) Generaliza tu solución para encontrar una fórmula para el área del paralelogramo en la Figura 3.10(b).

14. **(a)** ¿Cuál es el área del paralelogramo en la Figura 3.11(a)?

Figura 3.11

(b) Generaliza tu solución para encontrar una fórmula para el área del paralelogramo en la Figura 3.11(b).

15. Dado un triángulo rectángulo (Figura 3.12).

hypothenuse = hipotenusa

opposite side = lado opuesto

Figura 3.12

Es costumbre definir el **cosecante** de θ, escrito csc θ, como

$$\csc\theta = \frac{hipotenusa}{lado\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

(a) ¿Cuál es la relación entre el seno θ y el csc θ?
(b) Explica por qué no hay necesidad para una tecla **csc** en una calculadora.

16. Explica por qué podemos considerar

$$f(\theta) = \text{seno } \theta, \text{ para } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

como una función.

17. Cuando Hipparchus calculó el radio aproximado de la Tierra, él usó un hecho importante acerca de las tangentes hacia los círculos.

El ángulo hecho por una línea de tangente y el radio en el punto de la tangencia es un ángulo recto.

¿Cómo él podía estar seguro? Tú actualmente conoces la respuesta, pero puede que no sepas que la conoces. Te dirigiremos a través del razonamiento que prueba que este es el caso siempre. Nosotros proveemos las preguntas; tú provees las respuestas.

Para ayudar a mantener la notación clara, hemos dibujado y rotulado el diagrama en la Figura 3.13. Éste muestra una línea, *t*, la tangente en *P* en un círculo que contiene un centro *C*. Ahora, los ángulos hechos por *t* y *PC* son ángulos rectos o no, ¿correcto? Tú mostrarás que "no lo son" es imposible. Esto es, la suposición de que no son ángulos rectos nos lleva a la conclusión de que no puede ser cierto.

less than 90º = menos que 90º

Figura 3.13

(a) Si los dos ángulos formados por *t* y *PC* no son ángulos rectos, uno de ellos debe medir menos que 90º. ¿Por qué?
(b) Si llamamos a la medida de este ángulo más pequeño *m*, entonces $2m < 180º$. ¿Por qué?

En el lado más pequeño del ángulo recto, dibujamos un segmento de línea desde *C* que forma un ángulo (180 – 2m)º con *PC*, y lo extendemos hasta que se interseque en algún punto, *Q*.

(c) *PCQ* es un triángulo. ¿Cuál es la medida del $\angle CQP$? ¿Cómo lo sabes?

(d) ¿Qué tipo de triángulo es *PCQ*? ¿Cómo lo sabes?

(e) ¿Es *QC* más largo, más corto, o del mismo largo que *PC*? ¿Cómo lo sabes?

(f) ¿Está *Q* adentro, afuera o en el círculo? ¿Cómo lo sabes?

(g) ¿Por qué no puede suceder esto? (*Pista*: ¿qué significa decir que una línea es tangente a un círculo?)

(h) Ya que es imposible para *PC* y *t* NO formar ángulos rectos, … Completa esta oración.

18. Cuando Jake estaba en la escuela, los estudiantes no tenían calculadoras.

PICTURES

Para poder encontrar el seno de un ángulo, los estudiantes tenían que usar tablas. Parte de esta tabla te es dada en la Figura 3.14 donde θ es medido en grados.

sin = seno

Figura 3.14

(a) ¿Hay algunas ideas que obtienes sobre el seno, a partir de esta tabla, que no obtuviste anteriormente, cuando calculaste estos números en tu calculadora?

(b) Estudiaste anteriormente la idea de la *interpolación lineal*. ¿Recuerdas? Usa la tabla de arriba y la interpolación lineal para estimar seno 27.4º. Ahora calcula seno 27.4º en tu calculadora. ¿Piensas que las dos respuestas se acercan?

19. Una pelota de béisbol tiene un radio de 1.45 pulgadas. La Tierra tiene un radio de aproximadamente 4,027 millas.

DRAWINGS

(a) Si un pedazo de cuerda se coloca alrededor de un círculo grande en esta pelota de béisbol, ¿cuántas pulgadas de cuerda son necesarias?
(b) Si un pedazo de cuerda se coloca alrededor de un círculo grande en esta pelota de béisbol, pero luego se mueve una pulgada "afuera" de la superficie, ¿cuántas pulgadas de cuerda se deben añadir a la cantidad en la parte (a) para obtener un círculo completo?
(c) ¿Cuántas pulgadas de cuerdas son necesarias para ir alrededor del Ecuador de la Tierra.
(d) Si se coloca una cuerda alrededor del Ecuador de la Tierra, pero entonces se mueves una pulgada hacia fuera de la superficie, ¿cuántas pulgadas de cuerda deben ser añadidas a la cantidad en la parte (c) para obtener un círculo completo?
(e) ¿Te hacen sentido las respuestas a las partes (b) y (d)? ¡Explica!

20. Un nuevo alojamiento de esquiar está siendo construido en Vermont, y el constructor quiere contemplar un tragaluz. La Figura 3.15 muestra un plano transversal para el techo. Calcula la altura *w*, en metros, contemplando el tragaluz.

skylight = tragaluz

Figura 3.15