

## 3.2 El coseno de un ángulo agudo

### Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Escribir la definición del coseno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo como una razón

Usar una calculadora para encontrar el coseno de un ángulo agudo

Usar el coseno de un ángulo agudo como una herramienta para solucionar problemas

Explicar cómo estimar la distancia desde la Tierra

Betty disfruta observando las Olimpiadas de Invierno en la televisión, Ella pensó que el esquiar parecía fácil y muy divertido, así que compró un par de esquís y subió montaña arriba en Colorado hasta un salto de esquiar. A ella se le advirtió que aprender a esquiar tomaba mucho tiempo y práctica, pero Betty estaba segura que no tendría problemas. Así como los esquiadores olímpicos, ella bajó, luego subió y volvió a bajar.

¡Caramba, cómo bajó! Nadie sabe verdaderamente cuántos huesos se rompió, pero ella estuvo en el hospital por varias semanas. Cuando Betty llegó al hospital, los doctores quisieron tomarle radiografías para ver dónde estaban los huesos rotos.

Uno de los problemas que encaran los profesionales de medicina es que las radiografías generalmente no muestran exactamente dónde un hueso está roto. Esto sucede porque el hueso no está siempre paralelo a la radiografía. Por ejemplo, supongamos que vemos el lado lateral. El segmento de la línea horizontal se supone que sea la radiografía y la línea adjunta es el hueso. La marca X en el hueso indica dónde está localizada una rotura (Figura 3.16).

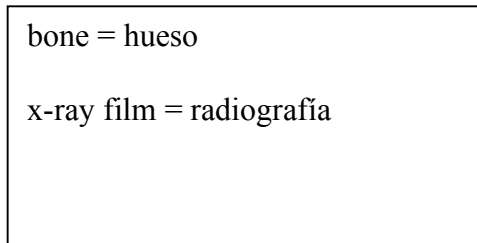
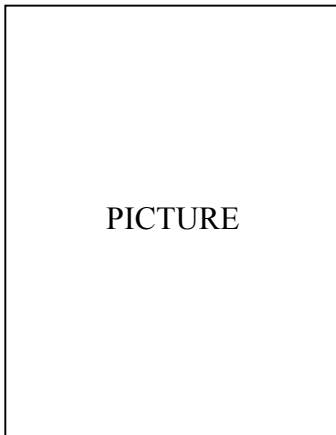


Figura 3.16

A los doctores le gustaría saber la localización de la rotura. Ayudaría, por ejemplo, el saber la distancia  $l$  desde  $A$  a  $X$  (Figura 3.17).

bone = hueso  
x-ray film = radiografía

Figura 3.17

Sin embargo, lo que los doctores pueden medir a través de la radiografía, es la distancia  $AB$  indicada en la Figura 3.18.

bone = hueso  
x-ray film = radiografía

Figura 3.18

Los doctores frecuentemente conocen (o pueden estimar) el  $\angle XAB$ . Ellos quieren usar esto para encontrar  $l$ . Supón que el  $\angle XAB$  es  $30^\circ$  y la distancia  $AB$  en la radiografía es 9 pulgadas (Figura 3.19).

bone = hueso  
x-ray film = radiografía

Figura 3.19

Usando un diagrama a escala, dibuja un  $ABX$  semejante al de la Figura 3.19 y estima la longitud  $l$ .

Observa de cerca el rectángulo  $XAB$  (Figura 3.20).



Figura 3.20

De nuestro estudio de triángulos semejantes, sabemos que todos los triángulos rectángulos mostrados en la Figura 3.21 son similares,

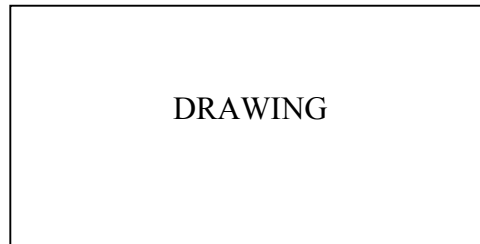


Figura 3.21

así que las siguientes proporciones de longitudes son iguales:

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AG} = \frac{AD}{AH} = \frac{AE}{AL}$$

Ciertamente, para cualquier triángulo rectángulo con un ángulo agudo de  $30^\circ$ , la proporción de las longitudes

$$\frac{\textit{lado adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

va a ser el mismo número (Figura 3.22).

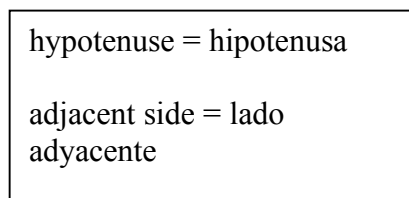


Figura 3.22

**Los matemáticos han encontrado que esta proporción, conocida como el *coseno*  $30^\circ$ , es 0.8660 a cuatro lugares decimales. Muestra cómo esta proporción puede ser usada para estimar la longitud  $l$  en la Figura 3.20 sin usar un diagrama a escala. ¿Está de acuerdo este estimado con (o se acerca a) lo obtenido cuando usaste un diagrama a escala?**

Uno puede seguir el mismo procedimiento con cualquier ángulo agudo  $\theta$  en un triángulo rectángulo. El **coseno** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es la proporción de la longitud del lado adyacente a la longitud de la hipotenusa (Figura 3.23). Esto es,

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Figura 3.23

El propósito de esta sección es hacerte consciente de cómo la proporción  $\cos \theta$  puede ser usada para solucionar muchos problemas de medidas.

**Como otro ejemplo, considera la siguiente situación:**

- 1. La distancia entre la superficie de la Tierra a la superficie de la Luna es alrededor de 240,000 millas. Los corredores olímpicos pueden correr alrededor de 14 millas por hora. ¿Qué sucede si un corredor olímpico fuera capaz de mantenerse corriendo a esta velocidad a lo largo de una carretera desde la Tierra hasta la Luna? ¿Cuánto tiempo tomaría?**



2. Es sabido que los carros de carreras viajan a más de 170 millas por hora. ¿Qué tal si un carro de carrera fuera capaz de viajar a 170 MPH en una carretera con una longitud de 240,000 millas de largo de la Tierra a la Luna? ¿Cuánto tiempo le tomaría?



- ¿Cuánto tiempo le tomó al Apollo 11 viajar de la Tierra a la Luna?



¿Cómo alguien pudo estimar que la distancia desde la superficie de la Tierra hasta la superficie de la Luna es alrededor de 240,000 millas? Recuerdas a Hipparchus, el astrónomo griego, quien hace más de 2,000 años estimó que el radio de la Tierra era de alrededor de 4,000 millas. Bueno, él también estimó la distancia desde el centro de la Tierra hasta el centro de la Luna. Hipparchus usó un diagrama semejante al de la Figura 3.24.

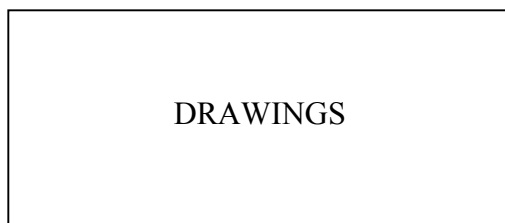


Figura 3.24

Él sabía que las longitudes de  $AB$  y  $AD$  eran cada una, aproximadamente 4,000 millas. También fue capaz de usar instrumentos para medir el  $\angle BAC$  como  $89.05^\circ$ . Giremos el triángulo  $ABC$  y coloquémoslo en la posición mostrada en la Figura 3.25:

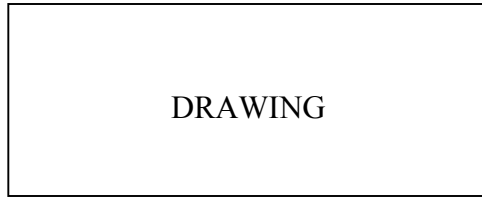


Figura 3.25

De esta figura se puede observar

$$\cos 89.05 = \frac{4000}{AC}$$

o, usando una calculadora,

$$0.01658 = \frac{4000}{AC}$$

o

$$AC = \frac{4000}{0.01658} \approx 241,255 \text{ millas}$$

¡Genial!

Ahora has visto dos proporciones importantes relacionadas a los ángulos agudos –el *seno* y el *coseno*. Hay una relación útil entre estas proporciones las cuales serán necesarias para ser usadas más adelante. Las siguientes actividades te deben ayudar a descubrir esta relación.

1. **En la tabla de la Figura 3.26, hemos calculado el  $(\text{seno } 25^\circ)^2 + (\text{coseno } 25^\circ)^2$  para la primera línea. Usando medidas para el ángulo  $A$  (otro que no sea  $25^\circ$ ) copia y completa la tabla usando una calculadora.**

Ángulo $A$	$(\text{seno } A)^2 + (\text{cos } A)^2$
$25^\circ$	1

Figura 3.26

2. Observa el triángulo rectángulo en la Figura 3.27.



Figura 3.27

¿Cuál es  $(\text{seno } \theta)^2 + (\text{cos } \theta)^2$ ?

3. ¿Qué conjetura harías acerca de  $(\text{seno } q)^2 + (\text{cos } q)^2$  para cualquier ángulo? Examinemos ejemplos adicionales para nuestra conjetura, pero usemos la función de tabla de la TI-84 Plus (TI-83 Plus) para ahorrar tiempo. Entra en Y= lista:  $y_1 = (\sin x)^2$ ,  $y_2 = (\cos x)^2$ , y  $y_3 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$ . Asegúrate que estás en el modo de grado. Presiona 2nd WINDOW (La ventana muestra TABLE SETUP.) y fija la TblStart en 1, y el Tbl en 1. Selecciona AUTO para ambas alternativas de variables. Presiona 2nd GRAPH (para TABLE). Usa la tecla de la flecha de la derecha para acceder la columna para  $y_3$ . ¿Qué ves? Ahora usa tu tecla de flecha hacia abajo hasta llegar a 89 grados. ¿Qué resultados estás viendo en la columna  $y_3$ ? ¿Piensas que los resultados cambiarán si trabajas en incrementos de 0.5 grados en vez de 1 grado? Reajusta el menú de tu TABLE SETUP y coteja las columnas de las tablas.
4. Ahora observa el triángulo en la Figura 3.28.



Figura 3.28

Escribe cada uno de los siguientes en términos de  $a$ ,  $b$ , y  $c$ .

(a)  $\text{seno } \theta =$

(b)  $(\text{seno } \theta)^2 =$

(c)  $\text{cos } \theta =$

(d)  $(\text{cos } \theta)^2 =$

¿Qué notas acerca de  $(\text{seno } \theta)^2 + (\text{cos } \theta)^2$ ?

Es común escribir

$(\text{seno } \theta)$  como  $\text{seno}^2 \theta$

y

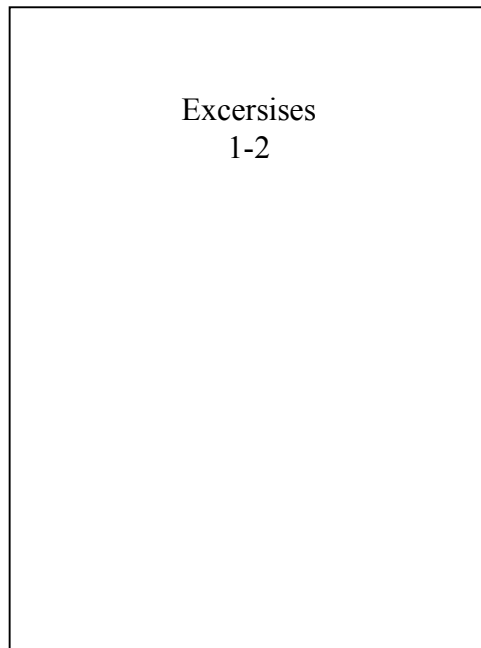
$(\text{cos } \theta)^2$  como  $\text{cos}^2 \theta$

La relación mostrada arriba ahora puede ser escrita como

$\text{seno}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = ?$

### Conjunto de ejercicios: 3.2

Los ejercicios 1-5 te ayudarán a familiarizarte con la computación del coseno de un ángulo, usando una calculadora. Para cada figura, encuentra el valor de  $x$  a dos lugares decimales.



Exercises 3 - 5

6. Para un ángulo agudo  $\theta$  en un triángulo rectángulo (figura 3.29), es usual definir la **secante** de  $\theta$ , escrito  $\sec \theta$ , como la proporción de la longitud de la hipotenusa a la longitud del lado adyacente. Eso es,

$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

Figura 3.29

- (a) ¿Cuál es la relación entre el  $\sec \theta$  y  $\cos \theta$ ?
- (b) ¿Por qué no hay necesidad para una tecla de **sec** en una calculadora?
- (c) ¿Qué es un  $\sec 31.7^\circ$ ?
7. Para un ángulo agudo  $\theta$ , explica por qué ninguno de los dos,  $\text{seno } \theta$  o  $\text{cos } \theta$  pueden ser más mayores que 1.
8. Quieres colocar una antena en un techo plano. La torre de la antena mide 17 pies de alto. Un alambre formando un ángulo de  $35^\circ$  con el lado vertical de la torre se va a utilizar para ayudar a sostener la torre (Figura 3.30). ¿Cuán largo es el alambre?

$$\text{wire} = \text{alambre}$$

Figura 3.30

9. ¿Recuerdas a Jake, quién tuvo que usar tablas para calcular el seno de un ángulo? Bueno, lo creas o no, él tuvo que usar otras tablas para calcular el coseno de un ángulo. Parte de dicha tabla es dada en la Figura 3.31 donde  $\theta$  es medido en grados.

TABLE
-------

Figura 3.31

- a) ¿Obtuviste alguna idea acerca del  $\cos \theta$  de esta tabla que no obtuviste anteriormente, cuando computaste estos números en tu calculadora?
  - b) Usa la tabla de arriba y la interpolación lineal para estimar  $\cos 27.4^\circ$ . Ahora computa  $\cos 27.4^\circ$  en tu calculadora. ¿Piensas que las dos respuestas están acercan?
  - c) ¿Cómo compararías la tabla de valores de seno en la Figura 3.14 con la tabla de cosenos en la Figura 3.31?
10. Si te posicionas en el punto  $P$  en el medio de un extremo de la tabla que se usa para tenis de mesa y observas el extremo de la malla de la mesa de tenis, el ángulo formado es  $33.7^\circ$ . La distancia entre el punto  $Q$  al final de la malla y  $P$  es 5.4 pies. Encuentra la longitud de la malla de la mesa de tenis y la longitud de la tabla mostrada en la Figura 3.32.

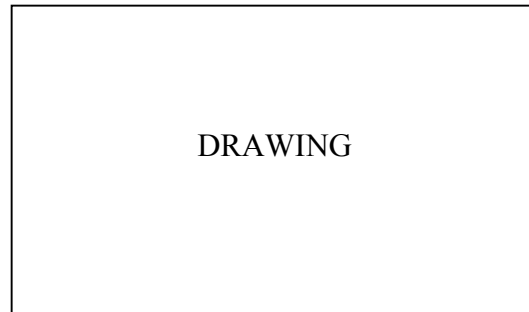


Figura 3.32