3.3 La tangente de un ángulo agudo

Los aeropuertos han usando lo que se conoce como ceilómetros para encontrar cuán altas se encuentran las nubes, para poder determinar si se le permite a los aviones despegar o aterrizar. Un ceilómetro consiste de tres piezas. La primera es un proyector de luz (como un proyector de películas o de diapositivas, pero más grande). Este proyector emite un rayo de luz brillante vertical en línea recta, hacia las nubes (Figura 3.33).

DRAWINGS

Proyector

Figura 3.33

La luz del proyector genera un punto de luz en las nubes.

Otro instrumento, a cierta distancia del proyector, detecta el punto de luz (Figura 3.34).

Logros del aprendizaje

Después de estudiare esta sección, podrás:

Escribir la definición de la tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo como una proporción.

Usar una calculadora para encontrar la tangente de un ángulo agudo

Usar la tangente de un ángulo agudo como una herramienta para resolver problemas.

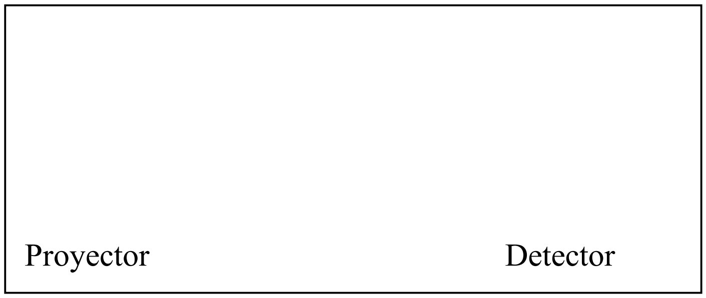

Figura 3.34

En el lugar del detector, también hay un instrumento que mide el ángulo en *A*. La distancia del proyector al detector es conocida. Ahora tenemos un triángulo rectángulo (Figura 3.35) donde la distancia *CA* es conocida y la medida del ángulo *A* es conocida. Supongamos que *CA* tiene una longitud de 1,500 pies y el ángulo *A* mide 78º (Figura 3.36).

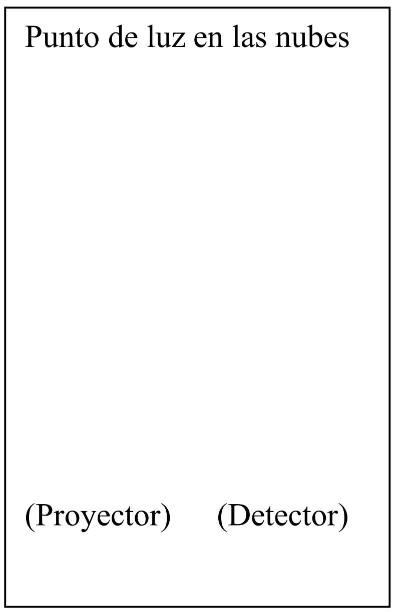

Figura 3.35

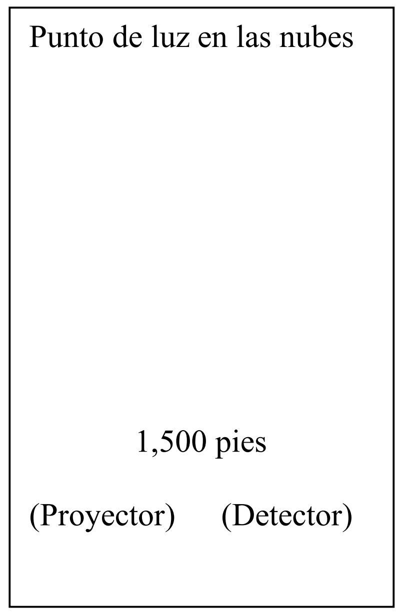

Figura 3.36

1. **Usando el coseno de un ángulo, encuentra la longitud de *AB* en pies.**

2. **Usando la respuesta de la parte 1 de arriba y el Teorema de Pitágoras, encuentra la distancia *CB* en pies. Esto es, encuentra cuán altas están las nubes.**

Hay una manera más fácil de solucionar este problema. De nuestro estudio de triángulos semejantes, sabemos que todos los triángulos rectángulos en la Figura 3.37 son semejantes, así que las siguientes proporciones de longitudes son iguales:

EQUATION

Figura 3.37

Cualquiera de estas proporciones equivalentes es llamada la **tangente** de 78º, la cual se escribe tan 78º. En general, la **tangente** de un ángulo θ en un triángulo rectángulo, escrita tan θ, es la proporción de la longitud del lado opuesto a la longitud del lado adyacente (Figura 3.38) Eso es,

$$\tan\theta = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$$

PICTURE

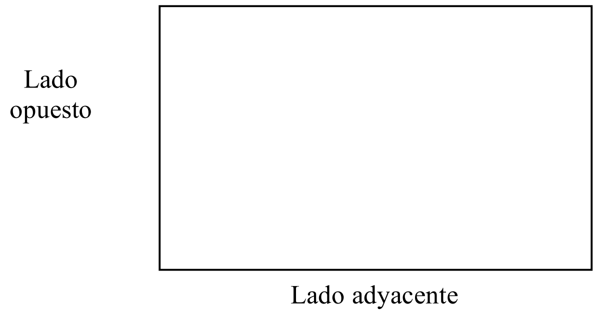

Figura 3.38

Regresemos a nuestro problema de encontrar la altura de la nube (Figura 3.39).

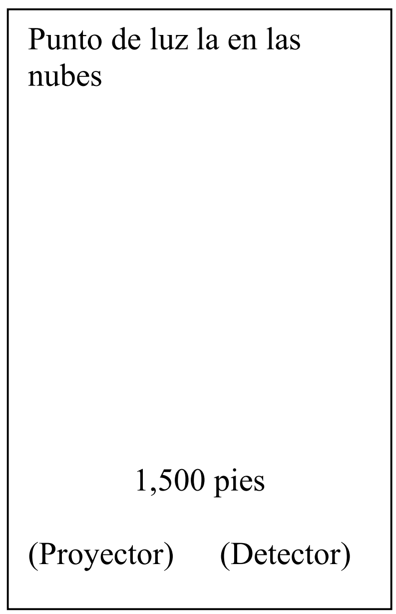

Figura 3.39

1. **Usando una calculadora, encuentra tan 78º. Asegúrate de que tu calculadora está en modo de grado.**

2. **Usando el resultado del primer problema, estima la altura de las nubes en la Figura 3.39. ¿Está de acuerdo este resultado con tu estimado anterior?**

Para otro ejemplo que envuelve la tangente de un ángulo, considera lo siguiente: Los alambres y los tubos de metal son parte de muchos tipos diferentes de instrumentos y máquinas, incluyendo los automóviles, walkman, cámaras, televisores, etc.

Metal tube = Tubo de metal

Car = Automóvil

Headphones = Audífonos

Camera = Cámara

TV = Televisor

Durante la construcción de dichos artículos, algunas veces uno necesita conocer el diámetro de los alambres o los tubos que se están utilizando. Un dispositivo que se ha usado para medir los diámetros es el calibrador−V. En la Figura 3.40 se provee una vista lateral de un calibrador.

wire = alambre

Figura 3.40

Para este calibrador−V en específico, el $\angle ACB$ mide 40º.

1. **¿Cómo piensas que un calibrador−V es usado para medir el diámetro de un alambre en la Figura 3.40?**

2. **Además del calibrador−V, ¿conoces otros métodos u otras herramientas para medir el diámetro de un alambre o un tubo?**

Aumentemos parte del la vista lateral del calibrador−V e insertemos las líneas de radios (Figura 3.41).

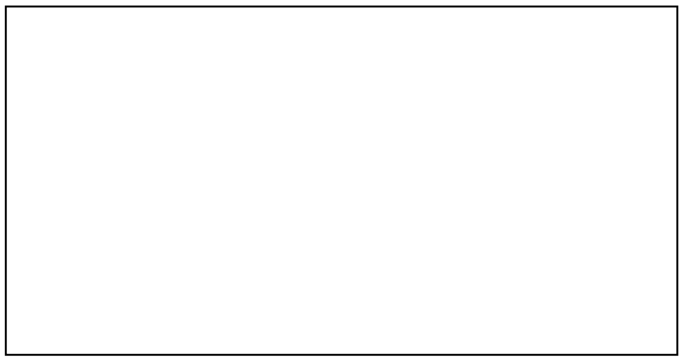

Figura 3.41

En este diagrama, *O* es el centro de un círculo representando el alambre (o el tubo), mientras *P* y *Q* son los puntos donde el alambre toca los segmentos *CB* y *CA*, respectivamente.

1. **¿Cuál es la medida del $\angle OPC$? Explica.**
2. **¿Cuál es la medida del $\angle OQC$? Explica.**
3. **¿Cuál es la medida del $\angle OCP$ y del $\angle OCQ$? Explica.**

Nuestro trabajo es encontrar la longitud del radio *OP*. Al duplicar este número podemos calcular el diámetro del alambre.

Si conoces que la longitud de *CP* es 7 mm., ¿tienes suficiente información para encontrar la longitud de *OP*?

Regresemos a nuestro calibrador−V (Figura 3.42).

Figura 3.42

Conocemos que la medida del $\angle OCP$ es 20º. Así que la proporción $\frac{OP}{CP}$ no es otra cosa que la tangente de 20º. Eso es

$$\tan\ 20\infty = \frac{OP}{CP}$$

La tangente de 20º se puede encontrar en tu calculadora. Primero asegúrate que está en el modo de grados. Luego presiona las teclas TAN 20 ENTER. Encontrarás

$$\tan 20^{\circ} = .3639702343$$

Ahora tenemos

$$.3640 = \frac{OP}{CP} \text{ (usando cuatro lugares decimales para tan 20º).}$$

Si, por ejemplo, conocemos que CP mide 9 milímetros de longitud, entonces

$$.3640 = \frac{OP}{9}$$

así que OP = 3.2760 mm., y resulta que el diámetro del alambre es 6.5520 mm.

En este capítulo, hemos estado observando las proporciones de las longitudes con nombres como seno, coseno, tangente, etc. El estudio de dichas proporciones se conoce como *trigonometría*.

Términos

La palabra *trigonometría* viene de las palabras griegas *trigonon*, que significa triángulo y *metron* que significa medir.

Término a conocer: La *trigonometría* es una rama de las matemáticas la cual tiene que ver con las conexiones entre los lados y los ángulos de los triángulos y figuras geométricas relacionadas.

Conjunto de ejercicios: 3.3

Encuentra, usando tu calculadora, la tangente de un ángulo en los ejercicios 1-7.

PROBLEMS 1-7

8. En la Figura 3.43, en los puntos A y B están localizadas dos estaciones de rastreo. Los puntos A y B están separados por 40 millas. En las estaciones de rastreo, hay personas midiendo los ángulos de un globo para medir el tiempo localizado en el punto C. Las medidas de los ángulos son dados en el diagrama. ¿Cuál es la altura h del globo?

miles = millas

Figura 3.43

9. La tangente de un ángulo puede ser escrito en términos de seno θ y cos θ. Explica cómo

$$\tan\theta = \frac{\text{seno } \theta}{\cos \theta}$$

Recuerda que seno^2 θ + cos^2 θ = 1. Al dividir ambos lados de esta ecuación por cos^2 θ, muestra que

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

10. En un triángulo rectángulo con un ángulo agudo (Figura 3.44), es costumbre definir la **cotangente** de θ, escrita cot θ, para hacer la proporción

$$\cot\theta = \frac{\textit{lado adyacente}}{\textit{lado opuesto}}$$

Figura 3.44

(a) ¿Cómo está relacionada la cotangente de un ángulo con la tangente de un ángulo?

(b) ¿Por qué no hay necesidad para una tecla de **cot** en una calculadora?

(c) ¿Qué es cot 43.5º?

11. Usando la Figura 3.45, explica las siguientes identidades:

seno $(90° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° - \theta) = $ seno θ
$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$	$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$
$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$	$\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

Figura 3.45

12. Un agrimensor quiere encontrar la altura de una montaña en la Figura 3.46. Las medidas indicadas en el diagrama están hechas. ¿Cuál es la altura de la montaña?

Distance = Distancia

meters = metros

Figura 3.46

13. Desde las dos estaciones de rastreo *A* y *B*, las cuales están a 400 millas una de la otra, los ángulos de elevación de un satélite están determinados a ser 32º y 63º, como se ilustra en la Figura 3.47.

miles = millas

Figura 3.47

¿Cuál es la altura *h* del satélite?

14. En las ciencias forestales, la trigonometría es usadas algunas veces para determinar la altura de un árbol. ¿Cómo piensas que la trigonometría es usada para determinar la altura, *h,* de un árbol (Figura 3.48)? ¿Qué medidas se consiguen? Haz un ejemplo para mostrar tus ideas.

Figura 3.48

15. **(a)** Usando una calculadora, calcula tan θº. ¿Cómo explicarías esta respuesta a un amigo?

(b) ¿Qué sucede cuando tratas de calcular tan 90º en una calculadora?

16. Explica por qué

$$f(\theta) = \tan \theta, \text{ para } 0º < \theta < 90º$$

puede ser considerada una función.

17. En un plano de coordenadas, dibuja una línea recta la cual tenga una pendiente positiva. Explica cómo la pendiente de esta línea está relacionada a la tangente de un ángulo.