3.4 ¿Qué hacen las teclas SENO^{-1}, COS^{-1} y TAN^{-1}?

En las tres secciones anteriores conociste los usos para las teclas SIN, COS, y TAN en una calculadora. Notarás que hay un segundo nivel de teclas marcadas SIN^{-1}, COS^{-1} y TAN^{-1}. El propósito de esta sección es la introducción de estas teclas haciéndote demostrar el rol que tiene cada una en la solución de problemas de medidas.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Usar las teclas SIN^{-1}, COS^{-1} y TAN^{-1} en una calculadora para solucionar problemas inversos

Explicar cómo el seno^{-1}x, cos^{-1}x, y tan^{-1}x pueden ser vistos como funciones inversas

Identificar los dominios de las funciones seno^{-1}x, cos^{-1}x, y tan^{-1}x.

1. Usando tu regla y tu transportador, dibuja un triángulo rectángulo de 3-4-5.

Figura 3.49

Tu trabajo es encontrar el ángulo θ. Usando tu transportador, mide tu ángulo θ tan cuidadosamente como sea posible. ¿Cuál es tu respuesta? Compara tu respuesta con otros estudiantes en la clase.

2. Sabemos por la Figura 3.49 que

tan $\theta = \frac{3}{4} = 0.75$

seno $\theta = \frac{3}{5} = 0.60$

cos $\theta = \frac{4}{5} = 0.80$

¿Pero cuál es el ángulo θ? Un problema como este es llamado un *problema inverso*. Toma el ángulo que obtuviste en el problema 1. Usando tu calculadora, calcula la tangente de tu ángulo. ¿Es éste 0.75 ó cercano a 0.75? Calcula el seno de tu ángulo. ¿Es éste 0.60 ó cercano a 0.60? Calcula el coseno de tu ángulo. ¿Es éste 0.80 ó cercano a 0.80?

3. En la Figura 3.50 vemos que $\sin\alpha = \frac{5}{7} = 0.7143$ (a cuatro lugares decimales). Usando cualquier método que quieras, trata de encontrar o estimar el ángulo o α (se lee *alfa*) en la Figura 3.50

Figura 3.50

Los problemas que estamos tratando de solucionar, los cuales hemos llamado problemas inversos, son justamente el tipo de problemas para los cuales se puede utilizar SIN^{-1}, COS^{-1} y TAN^{-1} en una calculadora. Por ejemplo, ¿qué harías si quisieras encontrar el ángulo θ en la Figura 3.51?

yards = yardas

Figura 3.51

Puedes ver que

$$\tan\theta = \frac{60}{35} = 1.7143 \text{ (usando cuatro lugares decimales)}$$

Queremos encontrar un ángulo θ tal que

$$\tan \theta = 1.7143$$

Es común escribir

$$\theta = \tan^{-1} (1.7143)$$

el cual se lee "θ es un ángulo cuya tangente es 1.7143". Puedes encontrar dicho ángulo θ en tu calculadora. Solamente presiona 2nd TAN (para TAN^{-1}) seguido por 1.7143. Deberías obtener

$$\tan^{-1} (1.7143) = 59.74^\circ \text{ (usando dos lugares decimales).}$$

1. **Usando SIN^{-1} (2nd SIN) en tu calculadora TI-84, encuentra el ángulo β (se lee beta) en la Figura 3.52:**

Figura 3.52

2. **Usando COS^{-1} (2nd COS) en tu calculadora TI-84, encuentra el ángulo α en la Figura 3.53:**

Figura 3.53

Puede que nosotros consideremos a seno θ, cos θ, y tan θ como funciones con un dominio 0º < θ < 90º. De manera semejante, seno^{-1}x, cos^{-1}x, y tan^{-1}x, puede que se consideren como funciones que se comportan como **funciones inversas**. ¿Qué queremos decir con esto? En secciones anteriores hemos incluido en la calculadora medidas de ángulos, representadas por variables θ, x, α ó β, y calculando el seno, el coseno o la tangente del ángulo. Por ejemplo, para calcular el seno θ, nosotros entramos con las teclas la medida del ángulo. (Figura 3.54.)

θ entrada   seno θ resultado

Figura 3.54

Ahora estamos invirtiendo el proceso (Figura 3.55).

seno θ entrada θ resultado

Figura 3.55

1. **Como un ejemplo numérico, encuentra seno 24º, usando tu calculadora TI-84 (Figura 3.56).**

24 entrada 0.4067366431 resultado

Figura 3.56

2. **Ahora, encuentra la medida del ángulo que tiene un valor de seno de .4067366431, lleva a cabo lo siguiente (Figura 3.57):**

.4067366431 entrada 24 resultado

Figura 3.57

Podemos leer seno^{-1}x como "el ángulo entre 0 y 90 grados cuyo seno x".

1. **Sin utilizar tu calculadora, ¿cuál es tan^{-1} 1?**
2. **Sin utilizar tu calculadora, ¿cuál es cos^{-1} (cos 35º)?**
3. **Sin utilizar tu calculadora, ¿cuál es seno (seno^{-1} 0.37542135)?**
4. **De todo el trabajo que hemos hecho hasta ahora, ¿qué dominios le darías a las funciones seno^{-1}x, cos^{-1}x, y tan^{-1}x, respectivamente?**

PHOTO

Como un ejemplo de una situación en la cual estas funciones inversas pueden ser útiles, considera lo siguiente: la estación espacial RIM está ubicada en una órbita ecuatorial de 500 millas sobre la Tierra. Queremos localizar las estaciones de rastreo a lo largo del Ecuador. Cada estación de rastreo tiene una pantalla de escaneo que cubre 180º con el horizonte como se muestra en la Figura 3.58.

Tracking station = estación de rastreo

Earth's surface = Superficie de la Tierra

Figura 3.58

El problema es localizar estaciones de rastreo que estén lo suficientemente cerca una de la otra, para que así no tengamos intervalos donde la estación espacial no esté siendo observada por lo menos por un escáner, como se muestra en la Figura 3.59.

Tracking station = Estación de rastreo

miles = millas

Orbit of RIM = Órbita de RIM

Figura 3.59

En la Figura 3.60 se ilustra ahora, lo separación más grande entre las estaciones A y B.

Tracking station = Estación de rastreo

miles = millas

Orbit of RIM = Órbita de RIM

Figura 3.60

Usando 4,000 millas como el radio de la Tierra y observando la simetría en la figura de arriba, deberías de ver que es necesario encontrar la longitud del arco (parte de la circunferencia) *d* en la Figura 3.61.

(on Earth's surface) = (en la superficie de la Tierra)

miles = millas

(center of the Earth) = (centro de la Tierra)

Figura 3.61

1. **Encuentra la distancia *d*. (*Pista*: Encuentra el ángulo θ. Luego usa el hecho de que la longitud de un arco es proporcional a su ángulo asociado.) Eso es, en la Figura 3.62,**

$$\frac{\theta}{360} = \frac{longitud\ del\ arco\ d}{circunferencia}$$

2. **¿Cuántas estaciones son necesarias para estar seguros de que no hay intervalos a lo largo del Ecuador?**

Figura 3.62

Conjunto de ejercicios: 3.4

Los ejercicios 1-5 te ayudarán a familiarizarte con las teclas “inversas” en tu calculadora. En cada ejercicio, encuentra la medida del ángulo θ.

Problems 1-4

5.

6. Un rectángulo mide 24 centímetros de largo y 10 centímetros de ancho. Encuentra los ángulos que una diagonal forma con los lados.

7. Una escalera de 40 pies es usada para alcanzar el tope de una pared de 30 pies. Si la escalera se extiende 4 pies sobre el tope de la pared, ¿cuál es el ángulo que forma la escalera con el suelo horizontal?

8. Una estación espacial es colocada en una órbita ecuatorial 200 millas sobre la Tierra. Tú quieres localizar las estaciones de rastreo a lo largo del Ecuador. Cada estación de rastreo tiene una pantalla de escaneo la cual cubre 180º en el horizonte. ¿Cuál es la distancia más larga permitida entre dos estaciones de rastreo para que no haya intervalos entre ellas?