3.6 Curvas del seno y el coseno: moviéndose en círculos

En tu calculadora TI-84 Plus (TI-83 Plus), usando la tecla MODE, asegúrate que tu calculadora está en el modo grados. Luego, usando la tecla WINDOW, inserta los siguientes números: Xmin = 0, Xmax = 720, Xscl = 10, Ymin = -2, Ymax = 2, y Yscl = 1.

Ahora, presiona la tecla Y =, luego teclea Y_1 = sin X.

Presiona GRAPH, para obtener una gráfica de Y_1 = sin X.

1. **¿Cómo le describirías esta curva a un amigo?**
2. **¿Tienes ideas acerca de cómo y cuando dichas curvas deberían ocurrir en el mundo real?**

   Usando la misma configuración WINDOW de arriba, usa la tecla Y = para configurar y_2 = cos X,

   y usando la tecla GRAPH, obtén una gráfica de Y_2 = cos X.
3. **¿Qué ideas tienes acerca de cómo estas gráficas están relacionadas al seno y el coseno de un ángulo agudo, que hemos estado estudiando en las secciones anteriores?**

Escribe un párrafo sobre cómo la gráfica de Y_2 = cos X difiere de la grafica de Y_1 = seno X.

(*Pista:* Puede que quieras hacer una gráfica de Y_1 = seno X y Y_2 = cos X en la misma pantalla.)

Comencemos observando algunas situaciones donde las gráficas que “son parecidas a estas” pueden ocurrir.

En las bahías fuera del océano, la altura del agua cambia con las mareas.

DRAWING

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Identificar situaciones del mundo real donde surgen curvas *onduladas* o *repetitivas*

Relacionar las coordenadas de puntos en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante al seno y el coseno de ángulos agudos

Extender los dominios de las funciones seno x, cos x, y tan x

Explicar cómo llegamos a las gráficas de y = seno x y y = cos x que aparecen en la pantalla de la calculadora.

En una bahía, la altura del agua fue medida como sigue, donde *M* indica la medianoche en un día específico (Figura 3.76).

PICTURE

height water (ft.) = altura del agua (pies)

noon = mediodía

a.m. = a.m.

p.m. = p.m.

Figura 3.76

1. **¿Sobre qué período de tiempo parece que el nivel del agua baja (disminuye)?**
2. **¿Sobre qué período de tiempo parece que el nivel del agua sube (aumenta)?**

Un mono saltó al aspa de un molino de viento. Puedes verlo en el lado izquierdo de la Figura 3.77. El viento está soplando y el molino se está moviendo en el orden de las manecillas del reloj a un ritmo estable. El mono se sostiene fuertemente y no se cae. Según pasa el tiempo, la altura del mono sobre el suelo cambia.

Figura 3.77

En el punto más bajo, el mono está a 10 pies del piso, y en su punto más alto, está a 30 pies del piso. ¿Qué ocurre si tramamos la altura del mono con el tiempo? Una gráfica puede que se parezca a algo semejante a la siguiente (Figura 3.78):

height = altura

time = tiempo

Figura 3.78

¿Cómo describirías esta gráfica a un amigo?

Los cambios de estación en la longitud de la luz del día pueden ser representados por una gráfica. Atlanta, Georgia tiene su día más largo, el 21 de junio, con una duración de 14 horas de luz solar y su día más corto, el 21 de diciembre, con una duración de 9 horas, 20 minutos de luz solar.

En un pedazo de papel de gráfica, dibuja el diagrama en la Figura 3.79. Estima la posición de los dos puntos, el día más largo y el día más corto del año. Estima algunos de los otros puntos y luego dibuja una curva suave a través de tus puntos. ¿Cómo describirías esta curva a un amigo?

Sugerencia

Trata de mejorar los estimados.
En cualquier momento que hagas estimados, trata de encontrar alguna manera de hacer uno *mejor*.

hours = horas

Jan = enero

Hours of daylight in Atlanta = Horas de luz solar en Atlanta

Figura 3.79

PICTURE

Puede que uno llame a las curvas que hemos estado viendo, *curvas onduladas* o *curvas repetitivas*. Dichas curvas ocurren en muchas áreas. Por ejemplo, cuando se toca una cuerda de una guitarra, la cuerda vibra (Figura 3.80(a)), enviando ondas a través del aire. Veamos cómo esto ocurre.

Piensa en el aire alrededor de la cuerda como consistiendo de muchas bolas de aire pequeñas (conocidas como *moléculas* de aire).

Figura 3.80

Observa la bola de aire que está oscurecida en la Figura 3.80 (b). Mientras la cuerda vibra, esta bola de aire se mueve de un lado a otro, al igual que la cuerda (Figura 3.81).

Figura 3.81

Esta bola de aire golpea otras bolas de aire, las cuales a su vez golpean otras bolas de aire –hasta llegar a tu oído, las cuales ahora tu oyes como música.

PICTURE

El movimiento de la bola de aire es observado aún más de cerca en la Figura 3.82

Figura 3.82

Asumimos que la bola de aire está originalmente en O. La bola luego se mueve de un lado a otro según la cuerda vibra. Coloquemos una unidad de medida en la línea O como sigue (Figura 3.83):

Figura 3.83

Según el tiempo pasa, la coordenada de la bola de aire va a cambiar. En un pedazo de papel cuadriculado, dibuja una gráfica de dónde la bola está localizada según pasa el tiempo (Figura 3.84).

Time = Tiempo

Coordenada de la bola de aire

Figura 3.84

¿Se ve semejante esta gráfica a la gráfica $Y_1 = \text{seno } X$ que viste en tu calculadora? Explica.

Ahora te ayudaremos a ver de dónde viene la gráfica de $Y_1 = \text{seno } X$ en tu calculadora y cómo está relacionada al seno de un ángulo.

Para hacer esto, necesitamos puntos en un círculo. Recuerda que un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en una distancia fija (llamada el *radio*) desde un punto fijo (llamado el *centro*). Cuando se hace una grafica de un círculo en un plano Cartesiano con centro en (0, 0), su ecuación es sorprendentemente sencilla. Para derivar la ecuación, todo lo que necesitas hacer es usar el Teorema de Pitágoras.

Figura 3.85

Los círculos en la Figura 3.85 tienen un radio de 1, pero podrías usar este procedimiento para un círculo con cualquier radio. Observa los triángulos dibujados en los círculos. Si x y y son las coordenadas de un punto de cualquiera de los círculos, al aplicar el Teorema de Pitágoras nos da

$$x^2 + y^2 = 1$$

En la Figura 3.85(a), permite que θ sea el ángulo formado por el eje positivo de x y la línea del origen al punto (x, y). Esta información es mostrada en la Figura 3.86.

Figura 3.86

Observa que

$$\text{seno } \theta = \frac{y}{1} = y \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

Eso es, *el punto (x, y) es el mismo punto que (cos θ, seno θ)*. Este dato nos permite extender nuestras ideas acerca del seno, el coseno y la tangente de un ángulo. Antes de hacer esto, sin embargo, miramos el punto (x, y) de arriba de una manera más precisa. Pensamos en el ángulo como comenzando en el eje de x positivo y terminando con la línea desde el origen del punto (x, y), moviéndose en dirección en contra de las agujas del reloj. Supongamos que comenzamos con el eje positivo de x y terminamos con la línea desde el origen al punto (c, d) en la Figura 3.87. El ángulo resultante es indicado en la figura.

Figura 3.87

Ahora podemos ver por qué la gente define

$$\cos \theta = c$$

y

$$\text{seno } \theta = d$$

En este caso, nota que el coseno de θ es negativo ya que c es negativo. El seno de θ es positivo, ya que d es positivo. ¡Tratemos un ejemplo! Queremos encontrar las coordenadas de P en la Figura 3.88, donde $\theta = 45^o$.

Figura 3.88

Deja caer una perpendicular desde P al eje de x, intersecando el eje de x en el punto A (Figura 3.89).

Figura 3.89

1. **En la Figura 3.89, ¿por qué $OA = AP$?**

2. **A partir del diagrama y el Teorema de Pitágoras, sabemos que**

$$(OA)^2 + (AP)^2 = 1$$

Muestra cómo esto lleva a

$$(OA)^2 = \frac{1}{2}$$

3. **Usando el resultado del problema 2, encuentra las coordenadas del punto *P* (a dos lugares decimales).**

4. **Explica cómo el resultado del problema 3 muestra que seno 45º = cos 45º = 0.71 (a dos lugares decimales).**

REFLEXIONA

En este capítulo has sido expuesto a las ideas básicas de la *trigonometría*. Esta es una materia la cual es históricamente significativa y práctica. Históricamente, la trigonometría jugó un papel en la construcción de las pirámides egipcias. Hoy en día, así como en el pasado, la trigonometría ofrece reglas prácticas para medir la Tierra, calcular las alturas de las montañas, etc. Las ideas en la sección final de este capítulo han sido muy útiles en el estudio de la electricidad. En particular, la corriente alterna (el tipo usado en los hogares en los Estados Unidos) envuelve corrientes que van y vienen representando un tipo de movimiento "ondulado", semejante al movimiento delineado en las curvas del seno y el coseno. Verás más sobre este tema en un libro posterior de **MATH** *Connections*.

PICTURE

Conjunto de ejercicios: 3.6

Los ejercicios 1-6 te ayudarán a familiarizarte con esta nueva idea del seno y el coseno. En cada caso, encuentra el seno y el coseno de θ.

Problems 1-2

PROBLEMS 3-6

7. Usa una figura semejante a aquellas de los ejercicios 1-6 para determinar en cuál cuadrante se encuentran el seno y el coseno de un ángulo, ambos negativos.

8. Usa una figura semejante a aquellas de los ejercicios 1-6 para determinar en cuál cuadrante es el seno de un ángulo positivo, pero el coseno del ángulo es negativo.

9. Usando figuras semejantes a aquellas de los ejercicios 1-6, contesta las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuál es el seno de 405°?

(b) ¿Cuál es el cos de 405°?

(c) ¿Cómo están relacionados el seno de 405° y el seno de 45°? Explica.

(d) Si el seno de $A = 0.7843$, donde A es un ángulo medido en grados, ¿cuál será el seno $(360^{\circ} + A)$? Explica.

(e) Si cos de $B = 0.3449$, donde B es un ángulo medido en grados, ¿cuál es cos $(720^{\circ} + B)$? Explica.