

Los círculos y los discos

Capítulo 4

4.1 Los puntos de vista

5`

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Describir la forma de un círculo por la definición del centro del radio y por la simetría

Identificar algunas propiedades prácticas, simbólicas y estéticas de los círculos.

Los círculos aparecen en todas partes, en el arte, la naturaleza, el diseño, la ciencia, la arquitectura, y la tecnología. Al mirar a tu alrededor, no tienes dificultad para encontrar objetos circulares. ¿Te has preguntado alguna vez por qué tantas cosas son circulares?

**¿Por qué piensas que tantas cosas son circulares?
¿Por qué piensas que una forma circular es a menudo más práctica que, digamos, un óvalo o un rectángulo o alguna otra forma? Nombra algunos objetos comunes que no funcionarían, o no funcionarían bien, si no fueran circulares.**

La forma del círculo es práctica para muchos usos. Además, su belleza y simplicidad lo han convertido en un símbolo importante en muchas culturas y religiones. Sus propiedades matemáticas han retado e intrigado a los matemáticos por siglos. En este capítulo examinamos algunas de las propiedades que hacen a los círculos útiles e interesantes. Comenzamos comparando tres vistas muy diferentes del círculo, de tres personas de muy diferentes formas de vida.

El arquitecto William Blackwell habla sobre los círculos en el diseño y la arquitectura de la siguiente manera:



El círculo es la más simple de las formas bidimensionales y la más fácil de dibujar en papel o inscribir en el suelo. Uno puede imaginar el placer que los antiguos tuvieron al diseñar los círculos de Stonehenge. Sólo necesitaron terreno plano, una longitud de soga atada a una estaca, alguien que le diera la vuelta alrededor manteniéndola tensa, y alguien para marcar el camino. ...

El círculo rodea un área dada con el menor perímetro o circunferencia y es la forma más compacta de los planos geométricos. Un círculo completo parece no tener principio ni final, y no tiene esquinas. ... La posición del Rey Arturo en la mesa redonda es marcada solamente por una silla especial. La mesa en sí misma no tiene cabecera o base. ... El punto principal de una mesa redonda es que todos pueden ver y ser vistos. Es la forma perfecta para una asamblea entre iguales.

...

Cuando se ejerce presión uniforme en un círculo, ya sea, desde adentro o desde afuera, el círculo es la más fuerte de las formas. Por esta razón, esta es la forma de los tanques de petróleo, barriles y ejes. Por la misma razón, los arcos de albañilería, posiblemente las formas más elocuentes de la arquitectura, son semicirculares. ...

En la arquitectura, además de los monumentos, mesas redondas, y las ciudades, los círculos han sido usados en los planos de los estadios, coliseos... las escaleras, las cúpulas de las estructuras, las iglesias, los museos, los apartamentos residenciales, y los estacionamientos.¹

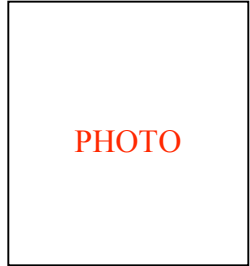
¿Puedes resumir cada uno de los cuatro párrafos de William Blackwell en una oración de seis palabras o menos? Trátalo.

- 1. ¿Qué es Stonehenge? ¿Dónde está localizado? ¿Qué tiene que ver con los círculos?**
- 2. ¿Quién fue el Rey Arturo? ¿Qué era la mesa redonda del Rey Arturo? ¿Por qué piensas que William Blackwell se refirió a la mesa redonda del Rey Arturo al hacer su “punto principal sobre una mesa circular”?**

¹Condensado de William Blackwell, *Geometry in Architecture* (Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 1984) pp. 95-102. Reproducido con permiso.

Black Elk, un líder Nativo Americano del siglo 19, habla del poder simbólico del círculo:

Has notado que todo lo que un indio hace está en un círculo, y esto es debido a que el Poder del Mundo trabaja en círculos, y todo trata de ser redondo. ... Este conocimiento llegó a nosotros del mundo exterior a nuestra religión. Todo lo que el Poder del Mundo hace es hecho en un círculo. El cielo es redondo, y he oído que la Tierra es redonda como una bola y así mismo son las estrellas. El viento, en su poder máximo, da vueltas. Los pájaros hacen sus nidos en círculos, porque su religión es igual a la nuestra. El Sol sale y se pone de nuevo en un círculo. La Luna hace lo mismo, y ambos son redondos. Aún las estaciones forman un gran círculo en sus cambios, y vuelven de nuevo a donde estaban. La vida de un hombre es un círculo de la niñez a la adultez, y de esta manera ocurre en todo lo que la fuerza mueve. Nuestras tiendas indias eran redondas como los nidos de los pájaros, y estas fueron siempre establecidas en un círculo, el círculo de la nación, un nido de muchos nidos, donde el Gran Espíritu quería que nosotros incubáramos a nuestros hijos.²

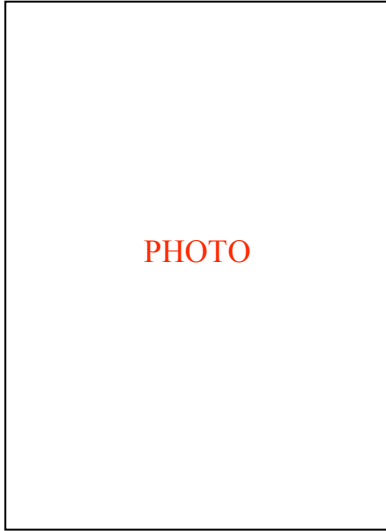


¿Cuál propiedad de los círculos está enfatizando Black Elk en esta cita? Encuentra una oración o una frase en las palabras de Black Elk que apoye tu opinión. ¿Tienen también otras figuras esta propiedad? Si es así, ¿por qué piensas que Black Elk sólo se refiere a los círculos?

El profesor Philip J. Davis, un artista que trabaja con la lógica, comenta como un matemático. Él describe algunas propiedades matemáticas del círculo que son la base para muchos de sus usos prácticos, estéticos y simbólicos:

Los griegos, quienes tuvieron bastantes nociones impresionantes de la belleza y la perfección, llegaron a la conclusión de que el círculo era la curva más bella. ... ¿Cuál es la curva más perfecta? ... No voy a hablar sobre la belleza física, pero, la belleza conceptual. ... Mi respuesta es la respuesta de los griegos: el círculo. Defenderé mi respuesta a base del interés matemático del círculo.

²De *Black Elk Speaks, Being the Life Story of a Holy Man of the Oglala Sioux* contada a través de John G. Neihardt, (Flaming Rainbow), (Lincoln: University of Nebraska Press, 1979), pp. 194-196. Reproducido con permiso de la Universidad de Nebraska Press.



Lo haré apuntando una cantidad de cosas extraordinarias que son ciertas sobre él.

1. Cada punto en un círculo se encuentra a la misma distancia del centro.
2. Si le das vuelta a un círculo sobre su centro, el círculo en rotación siempre ocupa precisamente el mismo espacio que el círculo original.
3. Cada diámetro del círculo es un eje de simetría.
4. Un círculo es una figura con un grosor constante.
5. Cada tangente de un círculo es perpendicular al radio dibujado del centro al punto de la tangencia. ...

...No hay ninguna figura que provea simplicidad, cuando se busca la simplicidad, y profundidad cuando se busca la profundidad, como la forma del círculo. No hay ninguna figura que se compare a esta.³

¿Cuáles de las propiedades enumeradas por el Profesor Davis te son familiares? Algunas no te serán familiares. Apunta cualquier término o ideas que no comprendas y vuelve a ellas mientras trabajas a través de este capítulo.

Las cinco propiedades del profesor Davis proveen una buena manera para organizar nuestra investigación de los círculos. Las primeras tres serán las más importantes para nuestros propósitos. Su primera propiedad es que cada punto en un círculo está a la misma distancia de su centro. Esta es la manera más simple de definir un círculo; lo llamaremos la **definición del centro del radio**.

Un **círculo** es un conjunto de todos los puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija (llamada el **radio**) de un punto en particular (llamado el **centro**).

El radio especifica el tamaño del círculo, y el centro fija su localización. Ya que el tamaño de un círculo depende sólo de su radio, ambas, el área adjunta por el círculo y la distancia a su alrededor (su **circunferencia**) pueden ser calculadas directamente de su radio.

³Condensado de Philip J. Davis y William G. Chinn, *3.1416 and All That*, 2nd ed. (Boston: Birkhäuser, 1985), pp. 88-93. Reproducido con permiso.

En otras palabras, ambas, el área y la circunferencia de un círculo son *funciones* de su radio. Las fórmulas simples que describen estas dos funciones importantes aparecen más adelante en este capítulo.

1. **Cuando dibujas un círculo con un compás, ¿qué parte del compás posiciona el centro? ¿Qué determina el radio?**
2. **La definición del centro del radio dice que todos los puntos deben estar en el mismo plano. ¿Por qué es necesario decir esto?**

Si lees la definición del centro del radio cuidadosamente, puedes ver que un círculo consiste *sólo* de los puntos de la curva, como se muestra en la Figura 4.1. El centro *no* es parte del círculo. Los otros puntos adentro tampoco son parte del círculo. El círculo junto con todos los puntos de adentro se le conoce como un **disco**. En el hablar cotidiano decimos a menudo círculo cuando queremos decir disco, permitiendo que el contexto haga claro nuestro significado. Aún en las matemáticas, algunas veces hablamos informalmente sobre encontrar el área de un círculo cuando en realidad queremos decir encontrar el área de un disco, la región rodeada por el círculo.

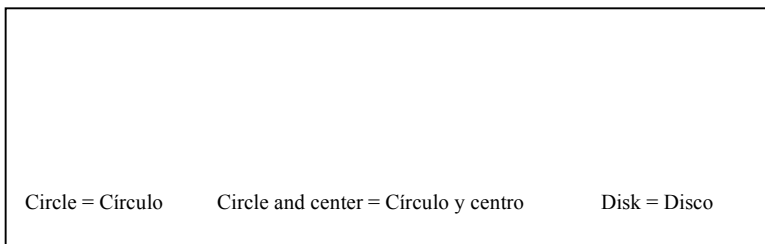


Figura 4.1

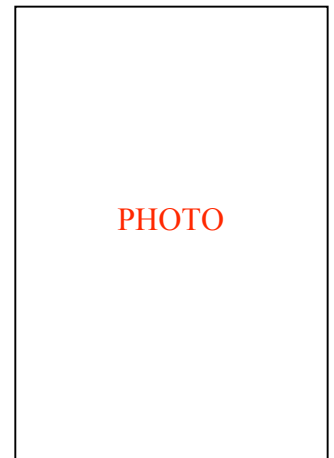
La segunda y tercera propiedad del profesor Davis están íntimamente relacionadas. Comenzamos observando la tercera, ya que es la más familiar.

Cada diámetro del círculo es un eje de simetría.

Un **diámetro** es un segmento de una línea que pasa a través del centro y tiene ambos puntos finales en el círculo. (Véase la Figura 4.2) Puedes fácilmente encontrar un diámetro de un círculo cortando un disco de un pedazo de papel. Dobra el disco por la mitad de manera que los dos lados del doblar coincidan, dobla el pliego, y ábrelo de nuevo. El doblar te muestra un diámetro del borde circular del disco. Es un eje de simetría para ese círculo. Cada vez que repitas este proceso de doblaje, obtendrás otro diámetro, otro eje de simetría. Como puedes ver, un círculo tiene una cantidad ilimitada de ejes de simetría.

Términos

Los *discos* usados en las computadoras son discos pequeños. Algunas veces, la palabra disco (disk) es deletreada disco (disc), como en un disco compacto (DC).



Corta un disco de un pedazo de papel. Dóblalo por la mitad de manera que los dos lados del dobléz coincidan, dóblalo y ábrelo de nuevo. Repite el proceso, doblando el disco en un lugar diferente. ¿En qué punto se intersecan los dos diámetros? Verifica tu respuesta doblando el disco una tercera vez, de nuevo en un lugar diferente.

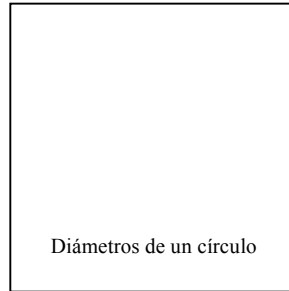
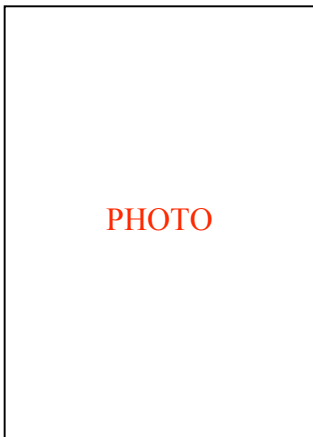


Figura 4.2

Términos

El plural de radio es radios.



Un segmento de línea con el final de un extremo en un círculo y el final del otro extremo en su centro se le llama el **radio** del círculo. La longitud de cualquier de estos segmentos es *el* radio de ese círculo. Esto tiene sentido porque todos los radios de un círculo deben tener la misma longitud. Por consiguiente, la palabra radio se usa de dos maneras, una como un segmento y la otra como una longitud. Esto no es tan confuso como parece. El significado propuesto es generalmente obvio de la manera en la cual la palabra es usada en una oración.

Cualquier segmento de línea con ambos finales de extremos en un círculo se le conoce como una **cuerda** del círculo. (Véase la Figura 4.3). Los diámetros de un círculo son las cuerdas que pasan a través de su centro. Las otras cuerdas no son ejes de simetría. ¿Ves por qué? Trata de doblar tu disco a través de una de ellas. ¿Coinciden los dos lados del dobléz?

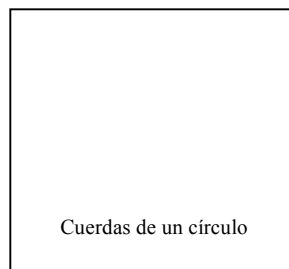


Figura 4.3

Cuando hablamos sobre *el* diámetro de un círculo, queremos decir la longitud de cualquier diámetro del círculo, en vez del segmento en sí. Esto es justamente como los dos usos del radio. Sin embargo, la palabra cuerda no es usada *nunca* de esta manera. ¿Por qué no?

La simetría usada para encontrar los diámetros por medio del doblaje es el tipo que has estudiado anteriormente. Esta simetría sobre una línea es a veces llamada *simetría de reflexión*, y a la línea se le llama *eje de simetría*. La segunda propiedad del profesor Davis se refiere a un tipo diferente de simetría, llamada **simetría de rotación**. Para comprender esta idea, observemos un octágono regular.

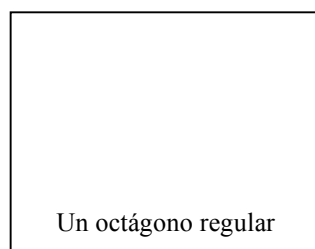
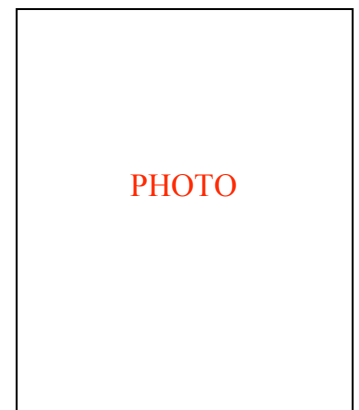
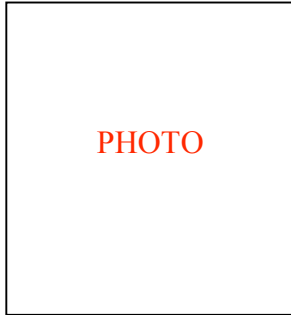


Figura 4.4

- ∞ **Traza el octágono regular mostrado en la Figura 4.4 en dos pedazos de papel de pastelería u otro papel que puedas ver a través de él. Pégalo con cinta adhesiva a un pedazo de cartón de manera que no se deslice.**
- ∞ **Ahora coloca el otro pedazo sobre el primero de manera que los puntos del centro y las líneas entrecortadas coincidan. Usando la punta de un lápiz para mantener los centros juntos, rota la copia de arriba alrededor del punto del centro, dejando la copia de abajo en su lugar.**
- ∞ **Usa un transportador para encontrar el ángulo más pequeño a través del cual puedes rotar la copia de arriba de manera que coincida con la copia de abajo nuevamente. Las líneas entrecortadas te pueden ayudar a hacer esto.**
- ∞ **Continúa rotando la copia de arriba y haz una lista de todos los ángulos entre 0° y 360° para los cuales la copia de arriba coincide con la de abajo.**





Una figura tiene **simetría de rotación** si se puede hacer una copia de esa figura que coincida con la original por una rotación positiva (alrededor de un punto) de menos de 360° . En dicho caso, llamamos cualquier ángulo (incluyendo 360°) para el cual la copia coincide con la figura original, un **ángulo de simetría de rotación**.

Así como la reflexión de simetría depende de una línea particular (el eje de simetría), de igual manera una rotación de simetría depende de un punto particular alrededor del cual ocurre la rotación. A este punto se le conoce como el **punto de simetría**. Algunas veces se le conoce como el **centro de simetría**. Observa la Figura 4.4. Si un trazado del octágono regular es rotado alrededor del punto del centro, entonces, el trazado coincidirá con la figura original en algunos ángulos de rotación menores de 360° . Si lo rotas alrededor de cualquier otro punto, el trazado no coincidirá con la figura original hasta que sea rotada 360° . Trátalo.

1. **¿Cuántos ángulos de simetría de rotación tiene un octágono regular? ¿Cuáles son? ¿Importa cuán grande es el octágono?**
2. **¿Qué tal si el octágono no es regular? En particular, cuáles son los ángulos de simetría de rotación para el octágono en la Figura 4.5? ¿Cuál punto de simetría estás usando? ¿Cómo localizarías ese punto usando sólo una regla?**
3. **Dibuja un octágono con exactamente cuatro ángulos de simetría de rotación. ¿Dónde está el punto de simetría?**
4. **Dibuja un octágono que no tenga simetría de rotación alrededor de *ningún* punto. Justifica tu respuesta.**
5. **¿Por qué piensas que no estamos considerando ángulos de más de 360° ?**

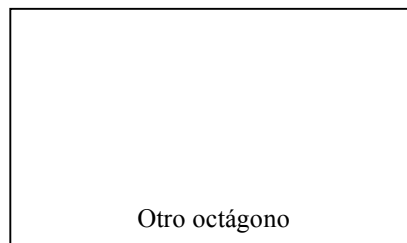


Figura 4.5

1. **¿Cuántos ángulos de simetría de rotación tiene un hexágono regular? ¿Cuáles son? (Pista: Relaciona la cantidad de vértices a la cantidad total de grados requeridos para girarlo alrededor. ¿Dónde está su punto de simetría? ¿Puedes localizar ese punto con una regla y un compás? Si es así, ¿cómo?)**
2. **¿Cuántos ángulos de simetría de rotación tiene un pentágono regular? ¿Cuáles son? ¿Dónde está su punto de simetría? ¿Puedes localizar ese punto con una regla y un compás? Si es así, ¿cómo?**

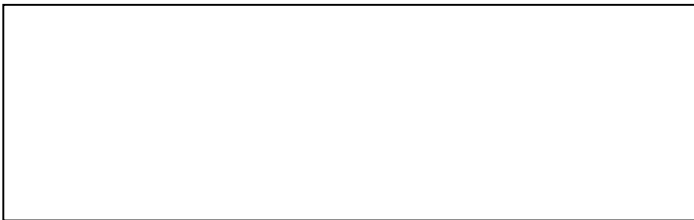
Nota que mientras más lados tiene un polígono regular, más ángulos de simetría de rotación tiene. ¿Cuál figura tiene la mayor cantidad de ángulos de simetría de rotación? El profesor Davis contesta esto cuando escribe, “Si le das vueltas a un círculo sobre su centro, el círculo en rotación siempre ocupa precisamente el mismo espacio como el círculo original”. En otras palabras,

Cada ángulo es un ángulo de simetría de rotación para un círculo (alrededor de su centro).

Esta es la razón principal por qué las formas circulares ocurren tan a menudo en las máquinas, como los engranajes, las poleas, u otras partes que rotan.

Las otras dos propiedades de los círculos en la lista del profesor Davis merecen ser mencionadas aquí brevemente.

Grosor constante. Probablemente, el objeto circular más útil es la rueda. Antes que las personas usaran la rueda, ellos movían objetos pesados usando rodillos. Cuando imaginamos dichos rodillos, generalmente pensamos en troncos con cortes transversales, como en la Figura 4.6.



De Brian Bolt Mathematics Meets Technology (New York: Editorial de Cambridge University, 1991).

Figura 4.6

¡Pero los rodillos no tienen cortes transversales! *Todo lo que se requiere es que la distancia del suelo al objeto que es transportado sea siempre la misma.* En otras palabras, las secciones de cortes transversales de un rodillo deben tener siempre el mismo grosor no importa donde sean medidos. Decimos que dicha figura tiene un *grosor constante*.

¡Los círculos son curvas de un grosor constante, *pero, estas no son las únicas curvas de grosor constante!* ¿Te sorprende esto?

¿Cómo puedes diseñar un rodillo que trabaje suavemente pero, no tenga un corte transversal circular? Esto es, ¿cómo puedes diseñar una curva con un grosor constante que no es un círculo? Piénsalo.

(Pista: Una diferencia entre las ruedas y los rodillos es que las ruedas tienen que dar vueltas alrededor de sus centros, pero los rodillos no).

Las tangentes perpendiculares y los radios. ¿Recuerdas haber visto esta propiedad de los círculos anteriormente en **MATH Connections**? Un problema resumió un argumento mostrando que el ángulo creado por una línea tangente y el radio en el punto de tangencia es un ángulo recto.

Conjunto de ejercicios: 4.1

Tangent line = Línea de tangente
Radius = Radio
Diameter = Diámetro
Disk = Disco
Arc = Arco
Chord = Cuerda
Center = Centro

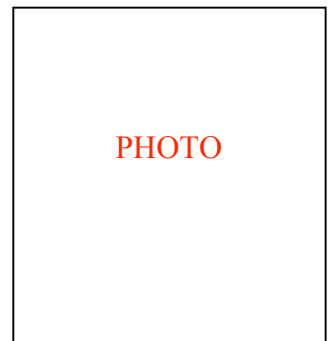
Figura 4.7

1. Los diagramas en la Figura 4.7 ilustran algunos términos importantes asociados a los círculos. Parea cada una de estas descripciones escritas con uno de estos diagramas.
 - (a) el círculo junto con su interior
 - (b) una porción del círculo conectando dos puntos en el círculo

- (c) un segmento de línea que pasa a través del centro y tiene ambos extremos finales en el círculo
- (d) un segmento de una línea teniendo un extremo final en el círculo y el otro en el centro
- (e) una línea que toca el círculo solamente en un punto, y de lo contrario se encuentra completamente fuera del círculo
- (f) un segmento de línea teniendo ambos extremos finales en el círculo
- (g) cada punto en el círculo equidistante de este punto

2. El siguiente párrafo es tomado de *Africa Counts: Number and Pattern in African Culture*, de Claudia Zaslavsky.⁴

Cuando un Chagga fabricó su casa en su forma tradicional de panal de abeja en las laderas fértiles del Monte Kilimanjaro, él llamó al hombre más alto que conocía. Este vecino se acostaría en el lugar donde iría el posible hogar, con sus brazos estirados. La distancia de la punta de los dedos de una mano a los de la otra se le conoce como un *laa*. Para marcar la circunferencia el constructor ató una estaca a una sogá con la longitud deseada del radio, de dos a tres *laa*. La sogá era atada a una estaca, y mientras caminaba alrededor de esta estaca, dibujó un círculo con su azada. La altura de la puerta era igual a la distancia de los brazos del hombre; su grosor era la circunferencia de su cabeza, medida por una cuerda.



- (a) ¿Cuál piensas es la longitud de *laa*? Explica.
- (b) Haz un dibujo a escala del suelo circular de la casa usando un radio de tres *laa*. Usa la persona más alta en tu clase o tu familia para determinar la longitud de *laa* para esta casa. Entonces, selecciona una escala que te permita dibujarla convenientemente. Estima la circunferencia y el área del suelo de la casa. Explica cómo hiciste este estimado.
- (c) Haz un dibujo a escala de la puerta de la casa, como se describe en la cita. Usa la misma persona que usaste para la parte (b).

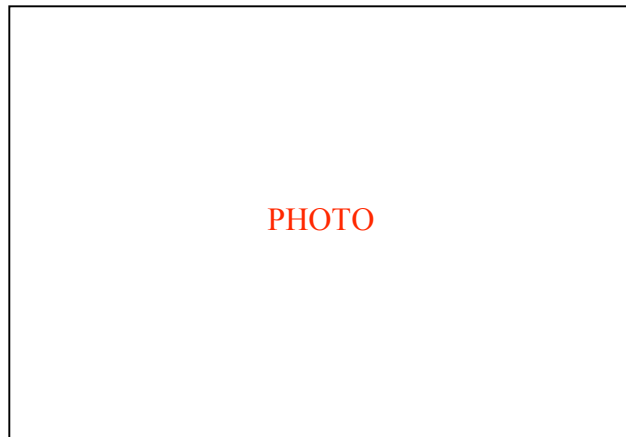
⁴Brooklyn, NY: Lawrence Hill Books, 1990. Reproducido con permiso.

3. El boletín del Centro Nacional de Huracanes del 10 de julio de 1996 sobre el huracán Bertha dijo:

“Vientos huracanados (75 MPH o mayores) se extienden 145 millas del centro”.

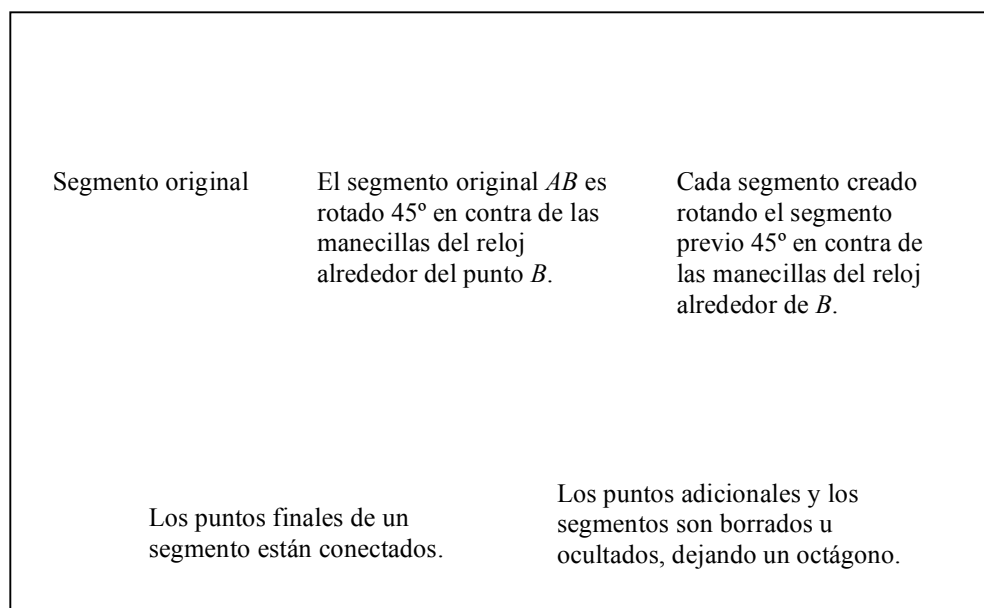
La estructura de un huracán es bastante circular. Puedes usar los conceptos de esta sección para obtener una idea de cuán grande es el área que sería afectada por los vientos dañinos de Bertha. Consigue un mapa de tu área que muestre el pueblo donde se encuentra tu escuela y un área de por lo menos 150 millas lejos de ti. Un mapa estatal o regional te puede ayudar. Asume que el ojo (centro) del huracán Bertha se encuentra sobre tu escuela. En el ojo del huracán tienes tiempo calmado y claro, pero, a tu alrededor los vientos están soplando y la lluvia está cayendo. Cuando pasa el ojo del huracán, la dirección del viento cambia y la intensidad de los vientos aumenta.

- (a) En tu mapa, dibuja un círculo con un radio a escala de 145 millas para ver cuán grande es el área que el huracán está afectando.
- (b) Enumera varios lugares que estén en o muy cerca del borde exterior de tu círculo. ¿Has estado alguna vez en estos lugares? Si es así, ¿cuánto tiempo te tomó llegar allá?
- (c) Si el huracán Bertha se está moviendo hacia el noreste a 25 millas por hora, ¿cuánto tiempo pasará antes de que Bertha pase sin percances por tu escuela? ¿Qué tal si se mueve directamente al norte o al noroeste?



4. La Figura 4.8 ilustra un método para usar el programa Geometer's Sketchpad o cualquier otro programa de computadora para dibujar polígonos regulares. Este trabaja porque los polígonos regulares tienen simetría de rotación.

- (a) ¿Por qué se usaron rotaciones de 45° para hacer un octágono regular?
- (b) ¿Qué ángulo de rotación se usaría para hacer un triángulo equilátero? ¿Qué tal un pentágono regular?
- (c) Usa el Geometer's Sketchpad o cualquier otra herramienta de dibujo geométrico para dibujar por lo menos otros tres polígonos regulares por medio de este método.



Dibujando un polígono regular

Figura 4.8

- 5. (a) Anteriormente en esta sección, encuentre los ángulos de simetría de rotación (mayor que 0° , pero no mayor que 360°) para un pentágono regular y para un hexágono regular. ¿Cuáles son estos?
- (b) ¿Cuántos ángulos de simetría de rotación tiene un triángulo equilátero? ¿Cuáles son estos? Explica cómo los encuentre.
- (c) ¿Cuál polígono regular tiene exactamente cuatro ángulos de simetría de rotación? Encuentra los ángulos.

- (d) ¿Cuántos lados tiene un decágono regular? ¿Cuántos ángulos de simetría de rotación tiene? ¿Cuál es el tamaño del ángulo más pequeño de simetría de rotación? ¿Cuáles son los próximos tres de estos ángulos, en orden de aumento de tamaño?
- (e) Haz una conjetura (una suposición razonable) sobre los ángulos de simetría de rotación de un n -gon regular (un polígono regular con n lados), donde n puede ser cualquier número entero mayor que 2. ¿Cuántos hay? ¿Dónde se encuentran?

6. Este problema extiende los resultados del problema 5.

- (a) El ángulo más pequeño de simetría de rotación de un n -gon regular depende solamente de la cantidad de lados, n . Esto es, es una función de n . Explica esta función en palabras. Entonces, escribe una fórmula para ello.
- (b) El próximo ángulo más pequeño de simetría de rotación de un n -gon regular es también una función de n . Escribe una fórmula para esta función.
- (c) El próximo ángulo más grande de simetría de rotación de un n -gon regular (mayor que 360°) es también una función de n . Explica esta función en palabras. Entonces, escribe una fórmula para ello.
- (d) Entra las tres funciones que encontraste en las partes (a), (b), y (c) en tu calculadora para gráficas. Entonces, úsalas para encontrar el ángulo más pequeño, el próximo más pequeño, y el próximo más grande de simetría de rotación para cada uno de los polígonos regulares.

(i) dodecágono

(ii) 16-gon

(iii) 20-gon

(iv) 100-gon

(v) 360-gon

(vi) 500-gon