

4.2 Los puntos en los círculos

Para planificar un jardín circular o construir un camino de entrada semicircular o marcar la línea de 3-puntos de una cancha de baloncesto, necesitas dibujar todo o parte de un círculo. Si conoces el centro del círculo y su radio, es fácil de hacerlo. Solamente corta una cuerda de la longitud del radio, entonces, párate en el centro con un extremo y pídele a un amigo que aguante el otro extremo de la cuerda tenso y camine alrededor tuyo, marcando los puntos a lo largo del camino, como en la Figura 4.9.

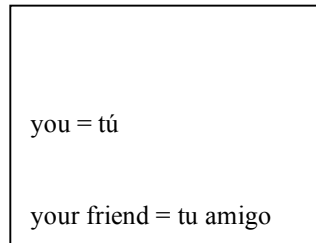


Figura 4.9

Algunas veces conocemos algunos puntos que un círculo debe pasar a través de, pero, no sabemos donde se encuentra el centro. Si conocemos algunos puntos, pero, no conocemos el centro, ¿cómo podemos encontrar más puntos en el círculo? Esta sección soluciona ese problema y explora algunos patrones que relacionan los círculos con los puntos y las líneas.

Cada una de las exploraciones siguientes será guiada por estas preguntas.

- A. ¿Hay un círculo que satisface las condiciones dadas? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Cómo lo sabes?
- B. Si existe(n) una o más, ¿cómo la(s) encuentra(s)? ¿Por qué este método siempre funciona?
- C. Si existe más de una, ¿qué tienen en común todas ellas?

Las direcciones para estas exploraciones están dadas para hacerlas con lápiz, papel, regla y compás. Si tienes el Geometer's Sketchpad u otro programa de computadora para dibujar, puedes usar las herramientas del programa para hacer los dibujos.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Construir círculos pasando a través de un punto dado o dos puntos dados y describe lo que tales círculos tienen en común

Construir un círculo pasando a través de tres puntos dados y determinar su centro y su radio

Formar el converso de una aseveración condicional

Distinguir entre la certeza de una aseveración condicional y la certeza de su converso.

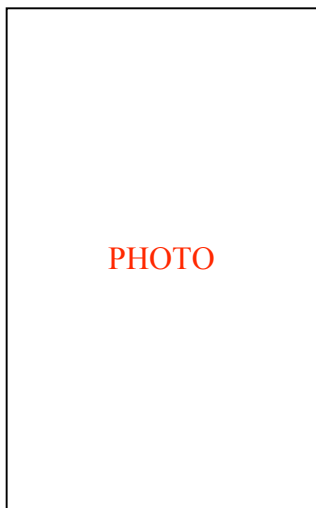
Sugerencias

Trata de encontrar buenas preguntas. Para encontrar buenas respuestas, tienes que hacer preguntas buenas. Cuando observas las condiciones de cualquier tipo, he aquí algunas buenas preguntas:

1. ¿Satisface algo estas condiciones? (existencia)
2. Si es así, ¿cómo lo puedo encontrar? (construcción)
3. ¿Satisface más de una cosa estas condiciones? (unicidad)
4. Si es así, ¿qué tienen en común? (patrón)

EXPLORACIÓN 1

Marca un punto P en un pedazo de papel. ¿Cuántos círculos puedes dibujar con el mismo radio que pasen a través de P ? Dichos círculos son fáciles de encontrar. Sólo marca otro punto a una distancia fija (digamos, 3 centímetros) de P . Rotúlalo Q_1 y déjalo que sea el centro de tu círculo. Entonces, dibuja un círculo con el centro Q_1 que contiene P .



Ahora deja la configuración de tu compás igual y escoge otro punto Q_2 . Dibuja el círculo con el centro Q_2 (y el mismo radio) que contiene P . Repite este proceso hasta que hayas dibujado seis o siete círculos, todos con el mismo radio, todos con centros diferentes, y todos pasando a través del punto P . Tu dibujo debe ser algo parecido a la Figura 4.10.

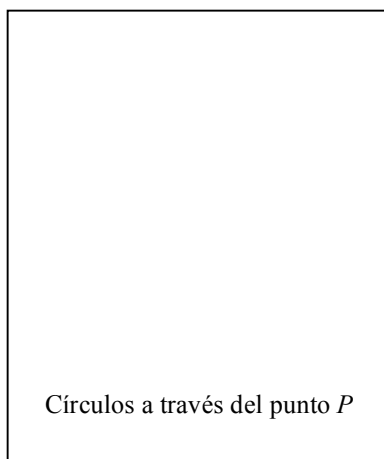


Figura 4.10

Es fácil ver que hay muchos círculos con el mismo radio a través de cualquier punto sencillo, P . Puedes dibujar tantos como quieras, usando un compás. Esto se ocupa de las preguntas A y B. La pregunta interesante para esta **Exploración** es la pregunta C: ¿Qué tienen en común todos los círculos a través de P ?

1. Los centros (Q_1 , Q_2 , etc.) de los círculos que dibujaste podrían lucir como si estuvieran en un círculo sencillo. ¿Lo hacen ellos? Si es así, ¿cuál es el centro de ese círculo y cuál es su radio?
2. Repite esta construcción, esta vez, escogiendo los centros R_1 , R_2 , etc., más separados de P , (digamos, 5 centímetros). Esto es, repite el ejercicio usando una configuración de compás más grande. ¿Caen todos los centros en un círculo? Si es así, ¿cuál es el radio de ese círculo? Explica tu respuesta.

- Las preguntas 1 y 2 presentan un ejemplo del tipo de propiedad común que buscamos. ¿Puedes ver cualquier otra propiedad común para todos los círculos con un radio particular que pasa a través de P ? (*Pista*: Trata dibujando un círculo centrado en P con un radio dos veces mayor que el radio de los otros círculos en tu versión de la Figura 4.10).

EXPLORACIÓN 2

Escoge y marca dos puntos, P y Q , con una separación de por lo menos una pulgada en un pedazo de papel.

- Dibuja un círculo que pase a través de ambos puntos, usando cualquier método y herramientas que escojas. Marca el centro de tu círculo y rotúlalo C . ¿Cómo escogiste este punto del centro?
- Dibuja el $\triangle PCQ$. ¿Qué tipo de triángulo es este? Explica.
- Dibuja por lo menos, cuatro círculos más a través de P y Q . Marca el centro de cada círculo. Ahora, dobla tu papel de manera que los puntos P y Q coincidan. Dobla tu papel de manera que puedas ver la línea del doblado claramente. ¿Qué notas?
- Si puedes, dibuja un círculo a través de P y Q donde su centro *no* esté en la línea del doblado. Si no puedes, explica por qué piensas que no se puede hacer.
- Usa tus respuestas para las partes 3 y 4 para conjeturar sobre una propiedad común de todos los círculos a través de P y Q .
- Dibuja el segmento de la línea PQ . Rotula como M el punto donde PQ cruza la línea del doblado. ¿Es M el punto del medio de PQ ? Justifica tu respuesta.
- ¿Es la línea del doblado perpendicular a PQ ? Justifica tu respuesta.
- Escoge cualquier punto F , excepto M , que está en la línea del doblado. Dibuja FP y FQ . ¿Cómo están relacionados el $\triangle FMP$ y el $\triangle FMQ$? (Véase la Figura 4.11). Justifica tu respuesta.

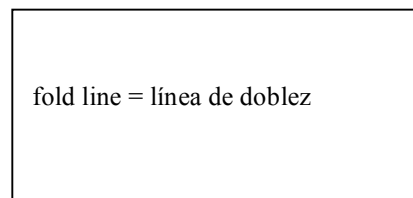


Figura 4.11

9. Si dibujas un círculo con el centro en tu punto escogido F y pasando a través de P , ¿deberá pasar también a través de Q ? Justifica tu respuesta.
10. ¿Qué propiedad en común tienen todos los círculos que pasan a través de P y Q ? Entonces, mira a ver si puedes justificarlo.

La **Exploración 2** muestra que puedes dibujar tantos círculos como quieras que contengan P y Q . Todo lo que tienes que hacer es escoger como el centro del círculo un punto en la bisectriz perpendicular de PQ . Esto garantiza que el centro estará tan lejos de P como lo está de Q . ¿Pero sabes que no hay otros círculos que contienen ambos P y Q cuyos centros *no* están en la bisectriz perpendicular? Quizás puedes ver en la Figura 4.11 que un punto sobre la línea del dobléz (la bisectriz perpendicular de PQ) aparenta estar más cerca de P que de Q , y un punto bajo la línea aparenta estar más cerca de Q . Pero, ¿puedes probarlo? Esto es, ¿puedes probar que un punto el cuál se encuentra a la misma distancia de otros dos puntos, *debe* estar en la bisectriz perpendicular del segmento que conecta esos otros dos puntos? El Problema 9 te pedirá que hagas esto. Piensa cómo puedes usar las ideas de la **Exploración 2** para ayudarte.

Términos

El prefijo *equi-* significa igual o lo mismo, de manera que *equidistante* significa igualmente distante o a la misma distancia.

Esta discusión ilustra un punto importante de lógica. Nota que hay una diferencia entre las dos aseveraciones siguientes:

- I. Si un punto se encuentra en la bisectriz perpendicular de PQ , entonces, es equidistante de P y Q .
- II. Si un punto es equidistante de P y de Q , entonces, éste está en la bisectriz perpendicular de PQ .

Conociendo que la aseveración I es cierta, nos dice que cualquier punto que seleccionamos en la bisectriz perpendicular estará equidistante de P y de Q . Conociendo que la aseveración II es verdadera, nos dice que si un punto es equidistante de P y de Q , *debe* encontrarse en la bisectriz perpendicular. Un punto que no está en la bisectriz perpendicular no tendrá esta propiedad.

Las aseveraciones I y II están relacionadas entre sí de una manera especial: Cada una es el **converso** de la otra. Hemos usado la palabra **converso** anteriormente; ahora es tiempo de mirar detenidamente qué significa exactamente. Nota la forma de la aseveración I.

SI *un punto está en la bisectriz perpendicular de PQ ,*
ENTONCES, *es equidistante de P y de Q .*

Una aseveración que puede ser puesta de la forma

Si _____, entonces _____

es llamada una **aseveración condicional** (o algunas veces, simplemente una **condicional**). Es llamada una aseveración condicional porque la parte de “si” es una condición supuesta para garantizar la verdad de la parte “entonces”, la cual se le conoce como la **conclusión**. A la condición en general se le conoce como la **hipótesis**.

1. **¿Cuál es la hipótesis y cuál es la conclusión de la aseveración I?**
2. **¿Cuál es la hipótesis y cuál es la conclusión de la aseveración II?**

Cada una de estas aseveraciones condicionales, I y II, está hecha de las mismas dos partes. Sin embargo, cuando vamos de una aseveración a la otra, los roles de las dos partes se invierten. La hipótesis en la primera condicional es la conclusión en la segunda, y viceversa. En dichos casos, cada aseveración condicional es llamada el **converso** de la otra.

Cuando ambas, la aseveración condicional y su converso son ciertos, decimos que las dos partes de estas aseveraciones son **equivalentes**. Cada una garantiza la otra. En dichos casos, decimos que una parte es verdadera *si y solo si* la otra es verdadera también.

En el caso de encontrar los centros de los círculos conteniendo P y Q , ambas condicionales juegan un papel en la solución de la pregunta. La aseveración I nos dice dónde encontrar algunos centros que funcionan; la aseveración II nos dice que no hay otro lugar para mirar. Podemos combinar estas dos aseveraciones en una diciendo,

Un punto está en la bisectriz perpendicular de PQ si y sólo si está equidistante de P y de Q .

Términos

El plural de *eje* es *ejes*.
El plural de *hipótesis* es *hipótesis*.

1. ¿Cuál es el converso de cada una de estas aseveraciones (verdaderas)?
 - (a) Si un triángulo tiene dos ángulos que miden lo mismo, entonces, éste es isósceles.
 - (b) Si dos triángulos son congruentes, entonces, sus ángulos correspondientes miden lo mismo.
 - (c) Si un cuadrilátero tiene cuatro ejes de simetría, entonces, es un cuadrado.
 - (d) Cada cuadrado tiene cuatro lados de igual longitud.

2. ¿Cuáles de los conversos de estas cuatro aseveraciones son verdaderos? ¿Cómo lo sabes?

3. ¿Para cuáles aseveraciones en la pregunta 1 son equivalentes la hipótesis y la conclusión? Justifica tus respuestas.

De la **Exploración 1**, sabes que una cantidad ilimitada de círculos puede ser dibujada a través de un punto dado. De hecho, puedes seleccionar cualquier otro punto y habrá un círculo centrado en ese punto el cual pasa a través del punto dado. De la **Exploración 2**, sabes que una cantidad ilimitada de círculos puede ser dibujada a través de cualquier *par* de puntos dado. La diferencia en este caso es que los centros de todos los círculos deben estar en una sola línea (¿en cuál línea?). Ahora, ¿qué tal sobre tres puntos dados?

De hecho, si los tres puntos están en la misma línea recta, ningún círculo pasa a través de los tres. Los puntos que están en la misma línea recta son llamados **alineados**. La próxima exploración observa el caso de tres puntos que no están alineados.

EXPLORACIÓN 3

Marca, en un pedazo de papel, tres puntos que no están alineados. Rotúlalos P , Q , y R .

1. ¿Puedes construir un círculo a través de los tres puntos, P , Q , y R ? Si es así, ¿dónde está su centro? ¿Cuál es su radio?

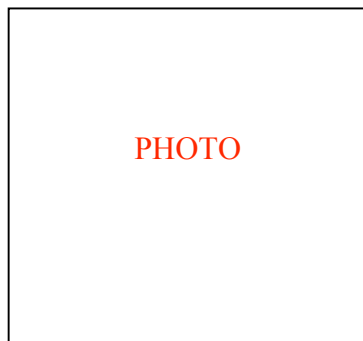
Quizás esta pregunta es mucho para manejar de una vez. Tratemos algunas más simples.

2. ¿Puedes construir un círculo a través de P y de Q ? ¿Cómo? ¿Dónde debe estar su centro? Recuerda la **Exploración 2**.

3. ¿Puedes construir un círculo a través de Q y de R ? ¿Cómo? ¿Dónde debe estar su centro?
4. Ahora junta las respuestas a estas dos preguntas. ¿Puedes encontrar un punto de centro que funcione para las dos preguntas previas al mismo tiempo? ¿Qué tal sobre un radio?
5. ¿Puedes construir otro círculo que pase a través de todos los tres puntos, P , Q , y R ? Si es así, ¿dónde está su centro? ¿Cuál es el radio? Si no puedes, ¿por qué no se puede hacer?

Repasemos lo que la **Exploración 3** nos ha mostrado.

- ∞ Para encontrar un círculo que pase a través de tres puntos dados, debemos primero verificar si están en la misma línea. Si lo están, no existe dicho círculo. Si no están en la misma línea, *siempre* podemos encontrar un círculo que pase a través de los tres.
- ∞ La manera de encontrar el centro y el radio de un círculo que pasa a través de tres puntos que no están en la misma línea, P , Q , y R es mostrada en la Figura 4.12. Esta funciona de la manera siguiente:
 - Construye los segmentos entre cualesquiera dos pares de tres puntos, digamos PQ y QR .
 - Dibuja las bisectrices perpendiculares de estos dos segmentos. Su punto de intersección es el centro, al cual llamaremos C . ¿Recuerdas por qué funciona este proceso?
 - El radio del círculo es la distancia desde C a cualquier punto de los tres puntos dados. ¿Por qué no importa cuál de los tres puntos usamos aquí?
- ∞ El centro de cualquier círculo a través de los tres puntos debe estar en ambas bisectrices perpendiculares. Ya que dos líneas rectas no pueden intersectarse en más de un punto, no puede haber más de un dicho círculo.



Estas preguntas se refieren a la Figura 4.12:

1. ¿Cómo sabemos que las bisectrices perpendiculares de PQ y QR se deben intersectar? ¿Por qué no pueden ser paralelas?
2. ¿Dónde la bisectriz perpendicular de PR interseca las bisectrices perpendiculares de PQ y QR ? ¿Cómo lo sabes?

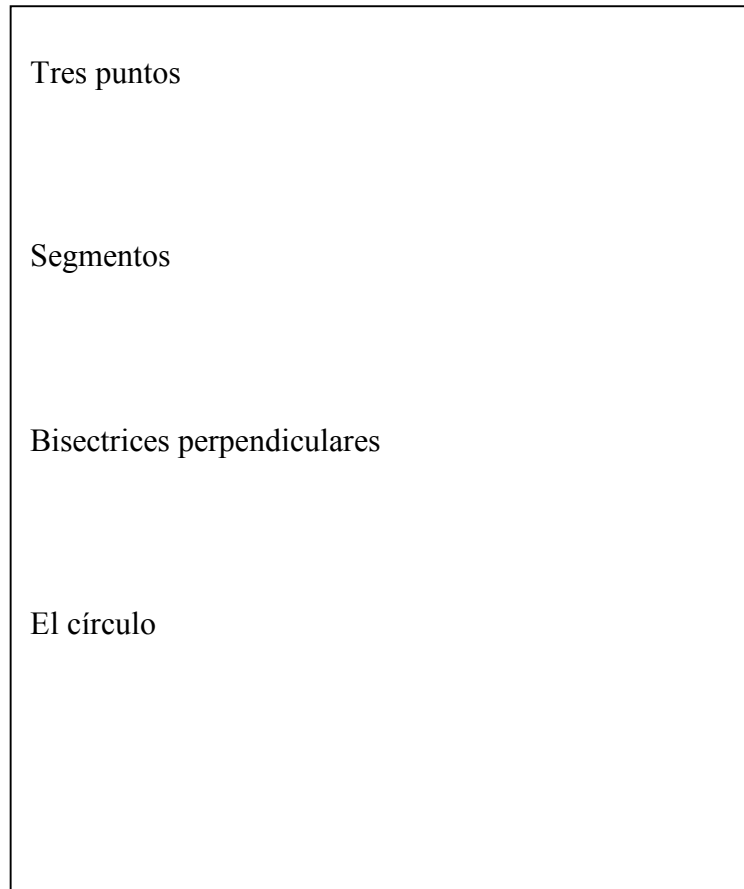


Figura 4.12

Conjunto de ejercicios: 4.2

Para algunos de estos problemas, necesitarás un compás y una regla, o una regla y un transportador, para dibujar las bisectrices perpendiculares. Necesitarás un compás para dibujar círculos.

1. Traza los tres puntos de la Figura 4.13 en tu papel. Construye, entonces, el círculo que pasa a través de los tres.

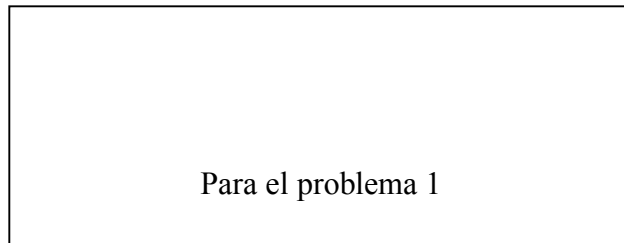


Figura 4.13

2. Traza los cuatro puntos de la Figura 4.14 en tu papel. Dibuja tantos círculos como puedas que pasen a través de tres de estos cuatro puntos. ¿Cuántas posibilidades hay?

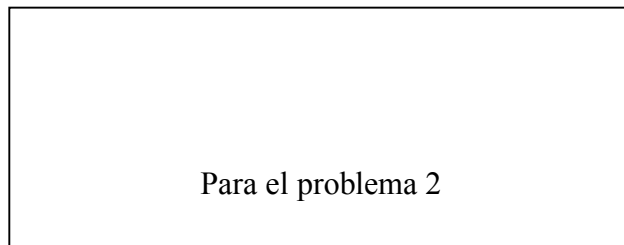
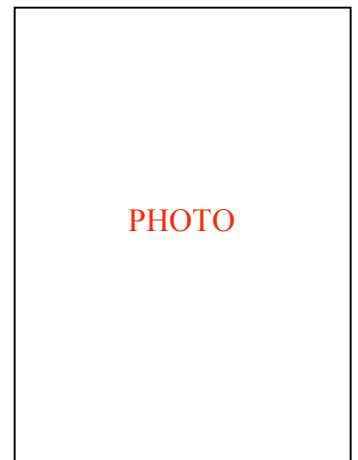
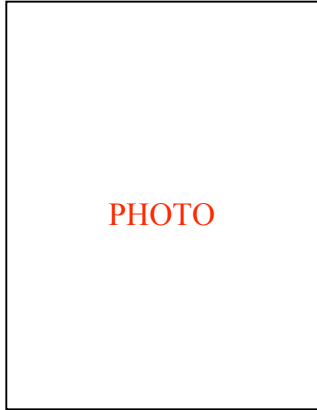


Figura 4.14

3. Tres leñadores, Abner, Barney y Chester, viven en cabañas separadas en lo profundo de North Woods. Barney vive media milla directamente al norte de Abner, y Chester vive una milla directamente al oeste de Barney. Hace unos días, un cazador que también vendía discos de satélites de televisión, les vendió a los tres leñadores un disco de satélite que puede ser conectado a las tres cabañas. Ellos acordaron dividir el costo equitativamente, provisto que el disco no estaría más cerca de uno de ellos de lo que estaba de los otros dos. ¿Dónde debe colocarse el disco de satélite?





4. La Sra. López le dio estas instrucciones a sus estudiantes. Dibujen tres puntos, A , B , y C . La distancia de A a B debe ser 2 cm., y la distancia de B a C debe ser 2 cm. Ahora dibujen el círculo que contiene los tres puntos.

Ambas Minnie y Maxine siguieron las direcciones de la maestra de manera completa y correctamente. Entonces, Minnie observó el papel de Maxine. “¡Espera, mi círculo es mucho más pequeño que el tuyo! ¿Por qué? ¿Cometí un error?” Contesta la pregunta de Minnie, usando bocetos.

5. La Figura 4.15 muestra un diagrama de un borde de un parque de la ciudad. Los tres árboles se encuentran dentro del parque. El Departamento de Obras Públicas decide colocar un jardín de flores moldeado como parte de un disco circular bordeado en un lado de la pared. El departamento quiere que el borde del arco del círculo incluya los tres árboles. Ayúdalos a completar este plan. Traza la Figura 4.15 en un pedazo de papel. Dibuja, entonces, el borde externo del jardín en tu copia y marca el centro de su círculo.

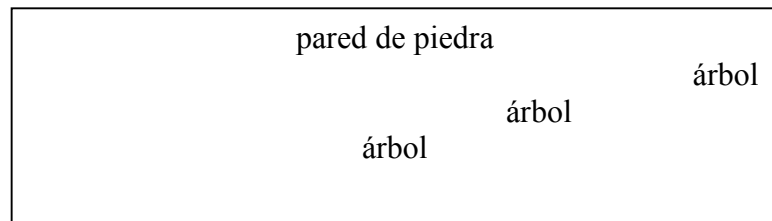


Figura 4.15

6. (a) Dibuja un triángulo. Hazlo de cualquier forma que tú quieras. Construye cuidadosamente la bisectriz perpendicular de cada lado. ¿Se encuentran las tres bisectrices perpendiculares en un sólo punto? ¿Estás seguro?
- (b) Trata de dibujar un triángulo para el cual las bisectrices perpendiculares de los tres lados claramente se encuentren en tres puntos diferentes. ¿Hiciste esto ya en la parte (a)? ¿Se puede hacer esto? ¿Por qué sí o por qué no?
- (c) ¿Qué tienen que ver las partes (a) y (b) con estos círculos?

7. (a) Caminando en el bosque, Minnie y Maxine encontraron una pieza de una rueda de una carreta vieja la cual está diagramada en la Figura 4.16(a). Ellas hicieron algunas medidas, como se muestra en el diagrama, el cual está dibujado a escala. Esto es, el dibujo está en proporción a la rueda real. ¿Cuál es el radio de la rueda original? Por supuesto, puedes asumir que era circular,.
- (b) Luego en su caminata, Minnie y Maxine encontraron la pieza de la rueda de la carreta que es diagramada a la misma escala en la Figura 4.16(b). ¿Piensas que era de la misma rueda? Explica.

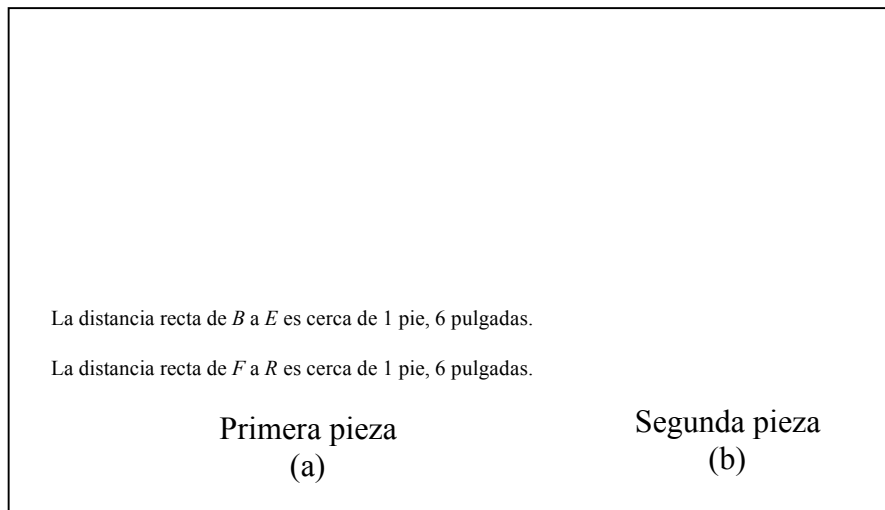


Figura 4.16



8. (a) Declara, en oraciones completas y claras, la hipótesis y la conclusión de cada una de las siguientes aseveraciones.
- (i) Si un punto se encuentra en la bisectriz perpendicular de un segmento de una línea, entonces, es equidistante de los dos puntos extremos del segmento.
 - (ii) Si un triángulo es equilátero, entonces, el centro del círculo a través de sus vértices se encuentra dentro del triángulo.
 - (iii) Si cada ángulo de un triángulo es agudo, entonces, el centro del círculo a través de sus vértices se encuentra dentro del triángulo.
 - (iv) Si tres puntos no están alineados, entonces, hay exactamente un círculo a través de los tres.
 - (v) Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces, cualquier círculo a través de tres de sus vértices debe también pasar a través del cuarto vértice.
- (b) ¿Cuál es el converso de cada aseveración en la parte (a)? ¿Cuáles de estos conversos son verdaderos y cuáles son falsos? Provee un contraejemplo para cada uno que sea falso.
- (c) ¿Para cuáles aseveraciones en la parte (a) son equivalentes la hipótesis y la conclusión? Para cada una que lo es, escribe de nuevo las partes equivalentes como una aseveración sencilla de “sí y sólo sí”.
9. Prueba que un punto el cual se encuentra a la misma distancia de otros dos puntos *debe* estar en la bisectriz perpendicular del segmento que conecta esos otros dos puntos.

He aquí un comienzo: Dibuja un diagrama como el de la Figura 4.11. Selecciona y rotula dos puntos, digamos P y Q , dibuja el segmento PQ , y rotula su punto medio M , y entonces, escoge un tercer punto, A , el cual asumes que está equidistante de P y de Q . Dibuja segmentos AP , AQ , y AM . ¿Ahora qué? ¿Qué necesitas probar? ¿Cómo esto está relacionado con tu diagrama?