4.3 Dibujando círculos con una calculadora para hacer gráficas

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Usar una calculadora gráfica para hacer un círculo con un centro y un radio dado

Representar círculos por medio de ecuaciones paramétricas

Hacer gráficas de círculos paramétricamente

Cambiar el tamaño y/o posición de un círculo cambiando sus ecuaciones.

El hacer conexiones entre el álgebra y la geometría es un hábito útil y poderoso del pensamiento en las matemáticas. Por ejemplo, una vez aprendes cómo escribir ecuaciones algebraicas para las líneas, fuiste capaz de usar ese conocimiento para las predicciones estadísticas. En esta sección, usamos la calculadora gráfica para ayudarte a ver cómo describir los círculos algebraicamente.

Busca cómo dibujar círculos en tu calculadora gráfica. Si tienes una TI-84 Plus (TI-83 Plus), puedes buscar esto en la sección de Dibujando Círculos **del Apéndice A. Dibuja, entonces, cada una de las siguientes figuras.**

1. **Un círculo con centro (2, 1) y un radio de 6. Si tu gráfica no se asemeja a un círculo, ¿cómo puedes ajustar la gráfica de Window para que lo haga?**
2. **Un círculo con centro (−7.2, 3.65) y un radio de $\sqrt{60}$. Ajusta la gráfica de Window de manera que aparezca todo el círculo y parezca un círculo.**
3. **Tres círculos con centro (0, 0).**
4. **El logo de cinco círculos de los Juegos Olímpicos.**

¿Estas pensando en algo como: "OK, esto es lindo, pero, ¿para que sirve?" Una pregunta razonable. Hay muchas situaciones en las cuales podrías usar este dibujo para solucionar un problema práctico rápidamente. He aquí un ejemplo. Después que lo trabajemos contigo, aparecerán uno o dos más como problemas para que los pienses y soluciones por tu cuenta.

PHOTO

Problema. Terry's Auto Repair se ha mudado a un garaje que mide 50 por 75 pies, que tiene salidas de aire comprimido en tres lugares a lo largo de las paredes. Una se encuentra en el centro de la pared de 50 pies del frente, y una está en cada una de las paredes de 75 pies de los lados, a 55 pies de la pared del frente. Terry quiere comprar tres mangas de aire para operar las herramientas neumáticas que sean lo suficientemente largas de manera que cada lugar en el garaje sea alcanzado por lo menos por una manga. ¿Serán unas mangas de 30 pies de largo lo suficientemente largas, o tendrá Terry que comprar mangas de 35 pies que son más costosas, o aún las de 40 pies que son más costosas aún?

Solución. Por supuesto, hay muchas maneras diferentes de solucionar esto. Una manera es tomando una cuerda larga y marcar los diferentes tamaños de los círculos en el suelo. Pero, esto es torpe y consume mucho tiempo, especialmente cuando hay algunos vehículos en el camino. En vez de esto, Terry usa una calculadora gráfica para hacer algunos diagramas. Usa tu calculadora para hacer los diagramas de Terry.

- Primero, ajusta el tamaño de Window para representar el piso de 50 por 75 pies, fijando x entre 0 y 75 y fijando y de 0 a 50.
- Usando estas coordenadas, las salidas para las mangas de aire están en (0, 25), (55, 0), y (55, 50).
- Dibuja tres círculos con un radio de 30, uno centrado en cada una de las salidas de las mangas de aire.

Completa la solución al problema de Terry contestando las siguientes preguntas:

1. **Con estas configuraciones de coordenadas, ¿cuál borde de la pantalla de la calculadora representa la pared del frente del garaje de Terry? ¿Cómo lo sabes? ¿Por qué piensas que Terry lo organizó de esta manera?**
2. **¿Cómo la gráfica muestra que las mangas de 30 pies no son lo suficientemente largas? ¿Cuántas áreas separadas del suelo del garaje no pueden ser alcanzadas por ninguna de estas mangas? Usa tu cursor para especificar las coordenadas de un punto en cada una de estas áreas.**
3. **¿Son las mangas de 35 pies lo suficientemente largas? Elimina la gráfica de la pantalla y dibuja tres círculos nuevos para averiguarlo. Si no lo son, ¿serán las mangas de 40 pies lo suficientemente largas?**
4. **Usando las longitudes de 35 pies, ¿hay algunos lugares que puedan ser alcanzados por dos mangas? ¿Hay algunos lugares que puedan ser alcanzados por las tres mangas? Usa la pantalla de tu calculadora gráfica para ayudarte a justificar tus respuestas.**
5. **¿Puede Terry economizar algún dinero comprando una manga de 30 para la pared del frente? ¿Cómo puedes usar tu calculadora gráfica para averiguarlo?**

La Marina está planificando maniobras para un área de 90 millas cuadradas en el Océano Pacífico central. Por seguridad, ellos quieren estacionar helicópteros para rescate de aire-agua de manera tal que cada punto en el área pueda ser alcanzado en un lapso de 20 minutos. En 20 minutos, una cuadrilla de rescate de un helicóptero puede viajar hasta 36 millas. Se han propuesto tres planes diferentes para la colocación de estos helicópteros. Asumiendo que la esquina inferior izquierda del área se encuentra en (0, 0) y la esquina superior derecha se encuentra en (90, 90) (millas), he aquí la colocación del helicóptero para cada uno de los tres planes.

PHOTO

Plan A. Cinco helicópteros – uno en el centro del cuadrado (en (45, 45)) y uno en cada esquina.
(0, 0), (90, 0), (0, 90), (90, 90)

Plan B. Cuatro helicópteros – en
(20, 20), (20, 70) (70, 20), (70, 70)

Plan C. Cuatro helicópteros – en
(25, 25), (25, 65), (65, 25), (65, 65)

¿Cómo puedes usar la función de dibujar círculos de tu calculadora gráfica para evaluar estos tres planes? Hazlo. ¿Cuál es el mejor? ¿Cuál es el peor? ¿Por qué?

Te has preguntado alguna vez
¿Cómo una calculadora "dibuja" círculos?

Cuando nosotros los humanos dibujamos un círculo, generalmente empujamos un bolígrafo o un lápiz alrededor de manera que haga una marca redonda en una superficie plana. Pero, una calculadora actualmente no *dibuja* nada; ésta *calcula*. Esto es, aplica las leyes de la aritmética y la lógica a los números. Así que, ¿cómo convierte los números en formas que vemos en la ventana de gráficas?

La ventana de gráficas de una calculadora es como parte de un plano de coordenadas. Es un arreglo rectangular de pequeños puntos, llamados *pixels*. El arreglo de los pixels puede determinar una fotografía. Fijando los valores de Window mínimos y máximos para x y y, automáticamente le das a cada uno de estos puntos un nombre, un par ordenado (x, y) de números que especifica la localización del punto en relación a los ejes de x y de y. Estos números, x y y, son las *coordenadas* del punto. Así, para dibujar un círculo, la calculadora debe calcular las coordenadas de todos los puntos para trazar en su gráfica.

Sugerencia

¿Recuerdas estos?
Encuentra o haz ejemplos.
Haz una imagen.
Busca un patrón.
Generaliza tus resultados.

Para calcular estas coordenadas del radio y las coordenadas del centro, la calculadora debe traducir la idea geométrica de un círculo en algún tipo de receta algebraica. Hay varias maneras diferentes de hacer esto. En lo que resta de esta sección exploraremos una de estas maneras, basada en algunas ideas que viste anteriormente en **MATH** *Connections*. Haciendo algunas preguntas fáciles y observando patrones de imágenes, ayudaremos a la calculadora a mostrarnos cómo su funcionamiento interno se comporta. Comenzamos con la **unidad de círculo**, el círculo del radio 1 centrado en (0, 0).

Figura 4.17

Tu maestro te dará una copia de la Figura 4.17, la cual ilustra el seno y el coseno de un ángulo, θ. Úsalo para contestar estas preguntas:

1. **Expresa la x y la y en la Figura 4.17 como funciones de θ.**

2. **Si $\theta = 30^\circ$, ¿cuáles son x y y? Usa tu calculadora y redondea tus respuestas a dos lugares decimales. Trama (x, y).**

3. **Dibuja un radio que haga un ángulo de 135º con el eje de positivo en contra de las manecillas del reloj del eje. Usa tu calculadora para encontrar, a dos lugares decimales, las coordenadas del punto donde este radio se encuentra con el círculo. Trama este punto. ¿Se encuentra donde esperas que esté?**

4. **Usa tu calculadora para encontrar, a dos lugares decimales, las coordenadas del punto donde el radio forma un ángulo de 238º en contra de las manecillas del reloj con el eje positivo de *x*, se encuentra con el círculo. Trama este punto. Verifica dibujando el radio en ese punto y midiendo el ángulo con un transportador.**
5. **Trama el punto (0.34, 0.94). ¿Parece este punto como si se encontrara en el círculo? Debería estarlo. Asumiendo que estos valores han sido redondeados a dos lugares decimales, encuentra el grado más cercano al ángulo en contra de las manecillas del reloj, entre el eje positivo de *x* y el radio en este punto. Si puedes, encuéntralo primero usando tu calculadora; entonces, verifica tu respuesta con un transportador.**
6. **Selecciona cualquier punto en la unidad de círculo. Describe dos maneras diferentes para encontrar las coordenadas de ese punto, incluyendo una que use el radio dibujado desde ese punto.**

Las preguntas de arriba muestran cómo las coordenadas de cada punto en la unidad de círculo son *funciones* del ángulo hechos por un radio y el eje positivo de x. Si (x, y) es cualquier punto en la unidad de círculo y si θ es el ángulo en contra de las manecillas del reloj entre el radio en (x, y) y el eje positivo de x como en la Figura 4.17, entonces,

$$x = \text{coseno } \theta \qquad \text{y} \qquad y = \text{seno } \theta$$

El ángulo θ es llamado un **parámetro** en este caso; es una variable que es usada para describir otras variables. A las ecuaciones que contienen parámetros se les conocen como **ecuaciones paramétricas**. Estas dos ecuaciones para las coordenadas de un punto en la unidad de círculo son ecuaciones paramétricas.

Una calculadora gráfica puede dibujar círculos usando dichas ecuaciones paramétricas. Para ver cómo funciona, sigue estos pasos para dibujar la unidad de círculo:

1. **Fija tu calculadora al modo paramétrico.**
2. **Asegúrate que está fijada para medir ángulos en grados y para conectar los puntos que traza en la actualidad.**
3. **Observa, ahora, la lista de las funciones. Debe estar esperando por funciones *en pares*, describiendo X y Y en términos de algún parámetro, el cual las calculadoras llaman a menudo T. En este caso, el parámetro es un tamaño de ángulo, medido en grados.**

4. **Para dibujar la unidad de círculo, llena las dos primeras ecuaciones de la siguiente manera:**

$$X_{1T} = \cos(T) \text{ y } Y_{1T} = \text{seno}(T)$$

Recuerda que T tiene que ser entrado como una variable.

5. **Para completar la imagen, tienes que decirle a la calculadora tres cosas sobre cómo quieres manejar el parámetro. Ve al menú de la calculadora que enumera las configuraciones para T, X, y Y. Este es el menú de WINDOW en la TI-84 Plus (TI-83 Plus) y fíjalos de la siguiente manera:**
   - ∞ **T es el ángulo de rotación alrededor del círculo. Ya que tú quieres un círculo completo, deja que T vaya de 0º a 360º.**
   - ∞ **Fija la cantidad de grados entre cada punto tramado y los próximos 5 por ahora. Este es el Tstep en la TI-84 Plus (TI-83 Plus).**
   - ∞ **Fija X entre −3 y 3 y fija Y entre −2 y 2, de manera que la unidad de círculo se ajusta bien en la pantalla.**

6. **Deja ahora que la calculadora haga el resto. Ordénale que haga una gráfica de estas ecuaciones.**

Llama la cantidad de grados entre los puntos tramados el paso del parámetro.

1. **¿Qué ocurre si fijas el paso a 45? ¿Qué tal si fijas el paso a 90? ¿Cómo tu calculadora conecta puntos tramados?**
2. **¿Qué ocurre si fijas el paso a 1? ¿Por qué? ¿Es esta configuración mejor o peor que fijarlo a 5? Explica.**
3. **¿Qué ocurre si fijas ambas X y Y a un mínimo de −2 y un máximo de 2?**

EXPLORACIÓN 1

Asegúrate que tu calculadora se encuentra en el modo paramétrico. Fija el parámetro, T, y las variables X y Y de la manera siguiente:

- ∞ T varía entre 0º y 360º en pasos de 5º.
- ∞ X varía de –6 a 6 con su escala marcada en cada unidad.
- ∞ Y varía de –4 a 4 con su escala marcada en cada unidad.

Entra ahora estas ecuaciones paramétricas en tu lista de ecuaciones:

$X_{1T} = \cos(T)$ $\quad$ $Y_{1T} = \text{seno}(T)$

$X_{2T} = 2\cos(T)$ $\quad$ $Y_{2T} = 2\,\text{seno}(T)$

$X_{3T} = 3\cos(T)$ $\quad$ $Y_{3T} = 3\,\text{seno}(T)$

$X_{4T} = 4\cos(T)$ $\quad$ $Y_{4T} = 4\,\text{seno}(T)$

No hagas gráficas de estas ecuaciones hasta que contestes las preguntas en la parte 1.

1. Cuando hagas gráficas de estas ecuaciones, debes obtener algunos círculos. ¿Cuántos círculos debes obtener? ¿Dónde piensas que están centrados? ¿De qué tamaño(s) son? Ahora, haz las gráficas de las ecuaciones y verifica tus respuestas.

2. Si fueras a entrar las ecuaciones

$X_{5T} = 5\cos(T)$ $\quad$ y $\quad$ $Y_{5T} = 5\,\text{seno}(T)$

¿cómo pensarías que cambiaría la imagen? Trátalo.

3. ¿Por qué los círculos aparentan estar planos cerca de los ejes?

4. Si fueras a entrar las ecuaciones

$X_{6T} = 10\cos(T)$ $\quad$ y $\quad$ $Y_{6T} = 10\,\text{seno}(T)$

¿qué obtendrías? Trátalo. ¿Hay algún problema con tu imagen? Debe haberlo. ¿Cómo lo puedes arreglar?

5. ¿Cuáles ecuaciones paramétricas usarías para dibujar un círculo de radio 8 centrado en (0, 0)? ¿Qué tal un círculo de radio 25? ¿Qué tal un círculo de radio 53.87?

6. Completa esta aseveración:

Las ecuaciones paramétricas para un círculo de radio *r* centrado en (0, 0) son __________ y __________.

La **Exploración 1** nos muestra lo que ocurre cuando multiplicas las funciones paramétricas para la unidad de círculo por un número fijo. Es natural preguntarse lo que ocurre cuando, en vez de multiplicar, añades un número fijo a estas dos funciones. La **Exploración 2** contesta esta pregunta.

EXPLORACIÓN 2

Quédate en el modo paramétrico. Fija X para que varíe entre –9 y 9, y fija Y para que varíe entre –6 y 6. Cambia, entonces, las ecuaciones paramétricas a las siguientes:

$$X_{1T} = \cos(T) \qquad Y_{1T} = \text{seno}(T)$$

$$X_{2T} = 2 + \cos(T) \qquad Y_{2T} = 2\ \text{seno}(T)$$

$$X_{3T} = 3 + \cos(T) \qquad Y_{3T} = 3\ \text{seno}(T)$$

$$X_{4T} = 4 + \cos(T) \qquad Y_{4T} = 4\ \text{seno}(T)$$

Haz gráficas ahora de estas ecuaciones:

1. Debes obtener algunos círculos. ¿Cuántos? ¿Dónde están centrados? ¿Qué tamaño(s) tienen?

2. Si piensas en el patrón obvio formado por estos círculos, parece que falta uno. Llénalo escribiendo su descripción paramétrica como X_{5T} y Y_{5T}. Haz la gráfica nuevamente para verificar.

3. ¿Cómo piensas que la imagen cambiará si pones

$$X_{6T} = 10 + \cos(T) \quad \text{y} \quad Y_{6T} = 10\ \text{seno}(T)$$

Trátalo. Si no obtienes ningún cambio, trata ajustando la configuración de Window.

4. Escribe ecuaciones paramétricas para hacer la Figura 4.18.

Figura 4.18

5. Escribe ecuaciones paramétricas para hacer la Figura 4.19.

Figura 4.19

6. Escribe ecuaciones paramétricas para hacer la Figura 4.20.

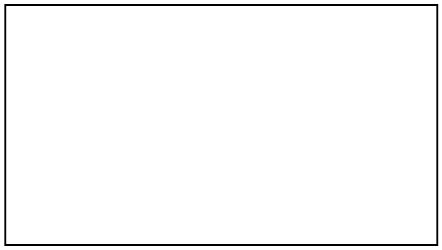

Figura 4.20

7. Completa esta aseveración.

Las ecuaciones paramétricas $x = a + \cos\theta$ y $y = b + \text{seno}\ \theta$ describen un círculo de radio _____ centrado en _____.

1. ¿Qué ocurriría si añadieras un número fijo al parámetro, en vez de a la función? En particular, a qué piensas qué se parece la gráfica de

$$x = \cos(5 + \theta) \qquad \text{y} \qquad y = \text{seno}\ (5 + \theta)$$

Trata de resolverla antes de usar tu calculadora.

2. ¿Qué ocurriría si multiplicaras el parámetro, en vez de la función, por un número fijo? En particular, ¿a qué piensas qué se parece la gráfica de

$$x = \cos(5 + \theta) \qquad \text{y} \qquad y = \text{seno}\ (5 + \theta)$$

Trata de resolverla antes de usar tu calculadora.

Si estás desconcertado por lo que muestra tu calculadora en estas dos situaciones, no te preocupes. Trata sólo de hacer una conjetura (una suposición inteligente) sobre lo que ocurre en cada caso. ¿Cómo puedes verificar tus suposiciones? ¿Cuáles otras ecuaciones podrías tratar, y qué esperarías que ocurra?

En la **Exploración 1** aprendiste cómo cambiar el tamaño de un círculo en la calculadora Window, y en la **Exploración 2** aprendiste cómo cambiar su ubicación. Lleva ahora a cabo ambas a la misma vez.

EXPLORACIÓN 3

Quédate en el modo paramétrico. Cambia la configuración de Window de manera que X varíe entre –12 y 12 y Y varíe entre –8 y 8. Tu maestro te dará una copia de la Figura 4.21 para completarla durante esta **Exploración**. Entra estas ecuaciones paramétricas como los primeros dos pares en tu calculadora:

– Para el círculo C_1: $x = 3 \cos \theta$ y $y = 3 \text{ seno } \theta$

– Para el círculo C_2: $x = 7 + 3 \cos \theta$ y $y = 4 + 3 \text{ seno } \theta$

Los círculos C_3 y C_4 aparecen en las preguntas 6-10.

θ	**Pt en C_1**	**Pt en C_2**	**Pt en C_3**	**Pt en C_4**

Figura 4.21

PHOTO

1. ¿Cuál es el centro del círculo C_1? ¿Cuál es su radio?

2. ¿Cuál es el centro del círculo C_2? ¿Cuál es su radio?

3. Usa la característica de trazar (Trace) de tu calculadora para completar las columnas C_1 y C_2 de la Figura 4.21 con las coordenadas de los puntos que corresponden a las medidas del ángulo en la columna 1. Redondea cada número a dos lugares decimales. Ya se ha hecho un punto para cada círculo: ahora haz tú tantos como puedas. ¿Por qué no puedes hacerlos todos de esta manera?

4. ¿Cómo puedes encontrar las coordenadas de puntos formados por ángulos que no son múltiplos exactos de 5º? Prueba tus respuestas completando las partidas restantes en la tabla.

5. Para las primeras cuatro filas de la tabla, resta las coordenadas de x y de y en la columna C_1 de las correspondientes coordenadas de x y de y en la columna C_2. ¿Qué patrón observas? Verifica a ver si tu patrón funciona calculando las diferencias en las coordenadas para el resto de las filas. ¿Hay *algunas* filas para las cuales no funcione? Explica por qué tu patrón funciona.

6. Escribe dos ecuaciones paramétricas que describen el círculo, C_3, con radio 5 centrado en (–6, 2). Éntralas como un tercer par de ecuaciones en tu calculadora. Verifica entonces la gráfica, para ver si este círculo aparece donde tú piensas que debería hacerlo.

7. Llena la columna C_3 de la Figura 4.21 con las coordenadas de los puntos que corresponden a las medidas del ángulo en la columna 1. Redondea cada número a dos lugares decimales.

8. Escribe las dos ecuaciones paramétricas que describen un círculo, C_4, que rodea el círculo C_2 dentro de él, pero, no toca ningún eje. Usa entonces, tus ecuaciones para llenar la columna C_4 de la Figura 4.21.

9. Completa esta aseveración:

Las ecuaciones paramétricas para un círculo de radio r centrado en (a, b) son _____ y _____.

EXPLORACIÓN 4

Comienza con todas las configuraciones y ecuaciones para los círculos C_1, C_2 y C_3 de la manera que estaban al final de la **Exploración 3**. Elimina el círculo C_4.

1. Cambia la configuración máxima de T a 180º. Explica qué efecto crees que esto tendrá en la gráfica y por qué piensas de esta manera. Haz una gráfica para ver si estás en lo correcto.

2. Explica cómo obtuviste cada una de las gráficas en la Figura 4.22.

Figura 4.22

3. Explica cómo obtener cada una de las gráficas en la Figura 4.23.

Figura 4.23

4. Explica cómo obtener la gráfica en la Figura 4.24.

Figura 4.24

5. Explica cómo obtener la gráfica en la Figura 4.25.

Figura 4.25

¿Cómo están relacionadas las partes 4 y 5 de la Exploración 4 a las preguntas de discusión de la Exploración 2?

Conjunto de ejercicios: 4.3

1. Dibuja cada uno de los diseños siguientes con tu calculadora gráfica:

(a) un círculo con centro (2, –5) y un radio de 7
(b) un círculo con centro (4, 3.6) y un radio de 5.68
(c) un círculo centrado en (–3, 1) que pasa a través de (–3, 10)
(d) un círculo centrado en (5, 8) que pasa a través de (–7, 17)
(e) cuatro círculos del radio 10 que pasan a través del punto (7, –3)

2. Estos pares de ecuaciones paramétricas describen círculos. En cada caso, especifica el centro y el radio del círculo; entonces, haz una gráfica en tu calculadora. Escoge cualesquiera configuraciones de Window que pienses sean mejores.

(a) $x = 8 \cos \theta$ $\quad y = 8 \text{ seno } \theta$
(b) $x = (-3) + 5 \cos \theta$ $\quad y = 5 \text{ seno } \theta$
(c) $x = 5 + \cos \theta$ $\quad y = 6.25 + \text{seno } \theta$
(d) $x = 5.8 + 4 \cos \theta$ $\quad y = (-2.3) + 4 \text{ seno } \theta$
(e) $x = (-2) + 0.7 \cos \theta$ $\quad y = (-3.5) + 0.7 \text{ seno } \theta$
(f) $x = 1.25 + \frac{1}{3} \cos \theta$ $\quad y = (-1) + \frac{1}{3} \cos \theta$

Para los problemas 3 al 8, ajusta las configuraciones de Window de tu calculadora y entra las ecuaciones paramétricas que formarán los diseños de abajo.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9. He aquí tres maneras diferentes de hacer un semicírculo de radio 1 centrado en (0, 0). El mínimo para T es 0º y su paso es 5º en los tres casos.

(a) Fija el máximo T = 180º; usa las ecuaciones X = cos(T) y Y = seno(T).

(b) Fija el máximo T = 360º; usa las ecuaciones X = cos(0.5T) y Y = seno(0.5T).

(c) Fija el máximo T = 90º; usa las ecuaciones X = cos(2T) y Y = seno(2T).

¿Cómo estas descripciones diferentes afectan la manera en que la calculadora gráfica trama los puntos? ¿Cuál es la más rápida? ¿Cuál es la más exacta? Explica tus respuestas.