4.4 El área y la circunferencia

En tu enseñanza anterior probablemente aprendiste dos fórmulas muy importantes sobre los círculos.

$$C = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2$$

La primera fórmula te dice cómo encontrar la circunferencia de un círculo a partir de su radio. La segunda te dice cómo encontrar su área a partir de su radio. Usa estas dos fórmulas y el hecho de que el diámetro de un círculo es dos veces su radio para resolver los siguientes problemas. Deja que tu calculadora te provea el valor de π.

En Pietro's Pizza, una pizza de queso de 8 pulgadas se vende a \$4.25, la de 12 pulgadas se vende a \$8.50, y la de 14 pulgadas se vende a \$10.25. Todas estas pizzas son redondas. ¿Cuál es la mejor oferta? ¿Por qué?

Jack el Rastreador tiene 1,200 pies de un cercado resistente, para un corral que proteja su rebaño de emús, de los dingos mientras él se encuentra lejos paseando por el interior despoblado de su país. Jack quiere que sus emús tengan tanto espacio como sea posible para correr alrededor. Él recuerda que un cuadrado en forma rectangular tiene el área mayor, pero, se pregunta si un corral circular con el mismo perímetro podría abarcar mucha más área.

Is the rectangular shape with

1. **¿Deberá Jack construir un corral cuadrado o un corral circular con sus 1,200 pies de cercado? Justifica tu respuesta.**
2. **¿Qué es un emú? ¿Qué es un dingo? ¿En qué país piensas que vive Jack?**

Ahora que recuerdas cómo estas dos fórmulas de círculo funcionan, echémosle una mirada más detenidamente. Ambas dependen de un número extraño conocido como π. Este símbolo es la letra griega que corresponde a nuestra letra *p*. Esta letra griega representa algún valor –pero, ¿qué valor? Tu calculadora dice que π equivale a 3.141592654, pero, ¿cómo se sabe? Podrías haber aprendido antes que π es igual a $\frac{22}{7}$. ¿Es este valor exactamente igual al de la calculadora? Si lo verificas, verás que no lo es. Ambos no pueden estar correctos. ¿Es alguno correcto? ¿Cuál es el valor *real* de π?

Pensándolo bien, ¿cómo sabes *realmente* que estas dos fórmulas siempre funcionan? Ellas dicen que puedes encontrar ambas, el área y la circunferencia de *cualquier* círculo, usando un número con un nombre extraño y un valor que no conoces exactamente.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Describir la conexión entre el área y la circunferencia de la unidad de círculo

Expresar el área y la circunferencia de un círculo como funciones de su radio

Encontrar el radio, diámetro, circunferencia, y el área de un círculo a través de cualquiera de estas medidas

Explicar el significado y el origen del número π.

¿No parece esto peculiar? En esta sección verás de dónde vienen estas fórmulas y por qué siempre funcionan. Además aprenderás más sobre el poderoso, evasivo π.

Para ver por qué las fórmulas del área y la circunferencia funcionan, reinventémoslas. En tu imaginación, viaja hacia atrás en el tiempo a cerca de 1,700 a.C., a un lugar en Egipto donde estas fórmulas eran desconocidas. Eres un joven egipcio, curioso, tratando de resolver cómo el radio de un círculo está relacionado a su circunferencia y el área que comprende. La clave es esta idea simple, pero muy importante.

Dato a conocer: Todos los círculos son iguales.

Si tú piensas en *similar* queriendo decir "la misma forma", entonces, debe ser fácil creer que todos los círculos son iguales. Pero, para utilizar este hecho matemáticamente, necesitamos una definición más cuidadosa de similitud. He aquí dos hechos útiles de un capítulo anterior:

∞ Dos figuras son similares si hay una constante k (el factor de escala) tal que la distancia entre *cualesquiera* dos puntos de una figura es k veces la distancia entre los correspondientes dos puntos de la otra figura.

∞ Si una región plana está hecha a escala por un factor de k, entonces, el área de la región a escala es k^2 veces el área de la región original.

1. **¿Cuál factor de escala relaciona a un círculo con un radio de 1 pie a un círculo con un radio de 3 pies?**
2. **¿Cuál factor de escala relaciona un círculo con un radio de 5 pulgadas a un círculo con un radio de 7 pulgadas?**
3. **Si un círculo envuelve un área de 12 pulgadas cuadradas y formas un círculo similar usando un factor de escala de 5, ¿cuál es el área dentro de el círculo más grande? ¿Por qué?**
4. **Si un círculo envuelve un área *A* y formas un círculo similar usando un factor de escala de *s*, ¿cuál es el área dentro del círculo más grande? ¿Por qué?**
5. **Si un círculo con un radio de 1 pie envuelve un área de *M* pies cuadrados, ¿cuál es el área dentro de un círculo con radio de 7 pies?**
6. **Si un círculo con un radio de 1 pie envuelve un área de *M* pies cuadrados, ¿cuál es el área dentro de un círculo con un radio de *r* pies? Explica. ¿Ves por qué esta es una idea MUY GRANDE?**

La respuesta a la pregunta 6 es un paso GRANDE en la simplificación de tu problema. He aquí lo que realmente dice:

> Si conoces el área dentro de un círculo con un radio de 1 de cualquier unidad de longitud, entonces, el área dentro de *cualquier* círculo es justamente M multiplicado por el cuadrado del radio de ese círculo.

En los tiempos modernos, esto significa que el área dentro de un círculo es una función de su radio. Si un círculo tiene un radio r, entonces, el área dentro de él es

$$A(r) = M \cdot r^2$$

donde M es el área dentro del círculo con radio de 1 de cualquier unidad de longitud usada para medir r. Un círculo con radio de 1 de cualquier unidad de longitud se le conoce como **unidad de círculo**. Por consiguiente, tu próximo trabajo es encontrar el valor de M, el número misterioso que es el área dentro de la unidad de círculo.

Puedes obtener un estimado aproximado de M de la Figura 4.26.

Estas preguntas se refieren a la Figura 4.26:

1. **¿Cuál es el área del cuadrado grande que contiene el círculo? ¿Cómo lo sabes?**
2. **¿Cuál es el área del cuadrado sombreado dentro del círculo? ¿Cómo lo sabes?**

La Figura 4.26 muestra que el área M dentro de la unidad de círculo es menor que 4, pero mayor que 2. En símbolos,

$$2 < M < 4$$

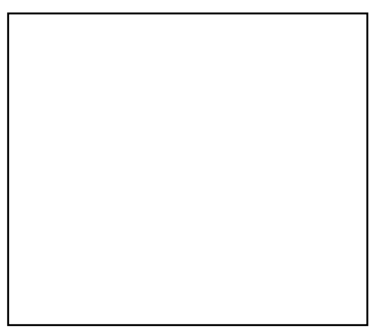

Figura 4.26

Para obtener un estimado más exacto de M, subdivide cada cuadrado de 1 por 1 en la Figura 4.26 en cuartos, como en la Figura 4.27. Entonces, la totalidad de los cuadrados pequeños y medios cuadrados en la región que contiene el círculo y la totalidad de los cuadrados pequeños y los medios cuadrados dentro del círculo, nos proveen unos mejores estimados altos y bajos para M.

Para obtener un estimado más cercano, solamente subdivide el cuadrado grande en cuadrados más y más pequeños, y entonces, cuenta cuántos están adentro y cuántos más toma para hacer una sección conteniendo el círculo.

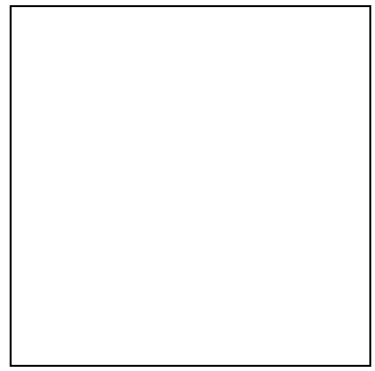

Figura 4.27

Estas preguntas se refieren a la Figura 4.27:

1. **¿Cuál es la longitud del lado de cada cuadrado pequeño en la figura? ¿Cuál es el área de cada cuadrado pequeño?**
2. **¿Cuántos de los cuadrados pequeños y medios cuadrados diagonales afuera del círculo pueden ser removidos sin tocar el círculo? ¿Qué área del cuadrado 2 por 2 se mantiene?**
3. **¿Cuál es el total del área sombreada adentro del círculo? (*Pista*: Cuenta la cantidad de los medios cuadrados diagonales pequeños que fueron añadidos al cuadrado sombreado en la Figura 4.26).**
4. **Completa esta aseveración:**

De acuerdo a la Figura 4.27, ___< *M* < ___.

Toma un pedazo de papel de gráfica y un compás. Usa la longitud del lado de 10 cuadros pequeñas en el papel de gráfica como tu medida de longitud. Coloca el punto del eje del compás en un punto donde se crucen las líneas en tu papel cuadriculado en algún punto cerca del centro y dibuja una unidad de círculo.

∞ **Trazando a lo largo de las líneas del papel de gráfica cuadriculado, haz un esbozo de la región más grande que los cuadrados pequeños que está completamente dentro de la unidad de círculo.**

∞ **De la misma manera, haz un esbozo de la región más pequeña de los cuadrados pequeños que encierran la unidad de círculo. Tu dibujo final debe parecerse al de la Figura 4.28.**

1. **¿Cuál es la longitud del lado de cada cuadrado pequeño del cuadriculado? ¿Cuál es el área de cada cuadrado pequeño?**
2. **¿Cuál es el área de la región detallada dentro del círculo?**
3. **¿Cuál es el área de la región detallada fuera del círculo?**
4. **Usa las dos respuestas anteriores para completar esta aseveración.**

   ___ $< M <$ ___
5. **Refina las regiones internas y externas añadiendo o removiendo los medios cuadrados diagonales pequeños. Usa estas regiones para obtener un mejor estimado del número misterioso *M*.**

   ___ $< M <$ ___
6. **¿Piensas que *M* se encuentra *exactamente* dentro de estos dos números? ¿Por qué sí o por qué no?**

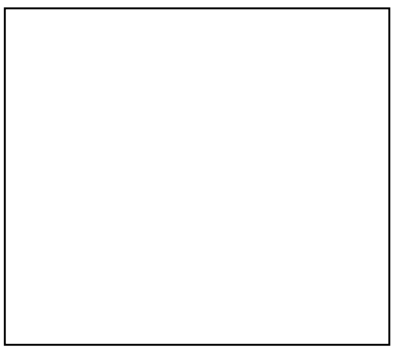

Figura 4.28

Observando las tendencias de los estimados altos y bajos para M que has encontrado, una buena suposición para el valor actual de M estaría entre 3 y $3\frac{1}{4}$. Estos ejemplos muestran cómo podrías afinar más este estimado, pero, ¡dibujar y contar pequeños cuadrados es trabajo que cansa! Este estimado es lo suficientemente bueno por ahora. Es tiempo de buscar una conexión entre el radio de un círculo y toda la distancia alrededor de él.

La distancia alrededor de todo un círculo se le conoce como su **circunferencia**. La circunferencia es una longitud. Una manera de encontrar cómo las circunferencias de los círculos están relacionadas a sus diámetros es recoger algunos datos, como sigue.

Términos
El prefijo en latín *circum-* significa alrededor. Cuando tú *rodeas* algo, vas alrededor de ello. La circunferencia de un círculo te lleva alrededor de ello.

PHOTO

Reúne por lo menos seis objetos circulares de diferentes tamaños, tales como monedas, tapas de jarras, y platos de pasteles. Mide el radio de cada objeto con tanta precisión como puedas. En realidad, el diámetro es más fácil de medir que el radio porque no tienes que encontrar el centro. Sólo mide la distancia más grande de un lado a otro del círculo. Usa una cinta de medir o una cuerda y una regla para medir las circunferencias. Copia la Figura 4.29 y llena el diámetro, radio, y circunferencia de cada objeto circular. Las medidas de una moneda de 25 centavos de los EE.UU. están completadas para ayudarte a comenzar.

Ahora aplica tus datos de la Figura 4.29 de la manera siguiente:

1. **Traza los pares de datos de las últimas dos columnas en un pedazo de papel cuadriculado. Rotula el eje de *x* como *radio* y el eje de *y* como *circunferencia*.**
2. **Dibuja una línea recta que parezca ajustarse a los puntos de datos de tu gráfica. Debe pasar a través del punto (0, 0). ¿Por qué?**
3. **Estima la inclinación de esta línea y escribe una ecuación para ella. ¿Cuál es su intercepto de *y*?**
4. **Verifica tú estimado entrando los datos en tu calculadora gráfica y encontrando la línea que mejor se ajuste. Las instrucciones para encontrar la línea que mejor se ajuste con tu calculadora está en el Apéndice A.**
5. **¿Cómo puedes usar esta línea para estimar la circunferencia de otros círculos si se te provee el radio? ¿Qué tal si se te provee el diámetro? Usa esta línea para añadir dos o más líneas a tu tabla, para estos objetos.**
    - **Una rueda de bicicleta con un radio de 13 pulgadas.**
    - **Un bote de basura con un diámetro de 21 pulgadas.**

Objeto	**Diámetro**	**Radio**	**Circunferencia**
Moneda de 25 centavos	2.4 cm.	1.2 cm.	7.5 cm.

Figura 4.29

Pensemos ahora cuidadosamente sobre los resultados de este experimento para reunir datos. ¿Parea bien tu línea que mejor se ajusta a tus datos de radio-circunferencia? Si lo hace (y debe hacerlo), entonces, esto te dice que la gráfica de la función que relaciona el radio a la circunferencia probablemente es una línea recta a través del origen. Esto significa que tiene la forma $C(r) = U \cdot r$, donde U es alguna constante "desconocida" para la cual has encontrado un valor aproximado.

1. **¿Qué valor para el número desconocido *U* obtuviste de tu línea de mejor ajuste? ¿Obtuvo todo el mundo en tu clase exactamente el mismo valor? ¿Obtuvo todo el mundo en tu clase aproximadamente el mismo valor?**
2. **Usa el hecho de que todos los círculos son similares para justificar el reclamo de que la función que relaciona el radio a la circunferencia debe ser una línea recta.**
3. **En términos de *U*, ¿cuál es la circunferencia de una unidad de círculo? Justifica tu respuesta.**
4. **En términos de *U*, ¿cuál es la circunferencia de un círculo con un radio de 12 pies? Justifica tu respuesta.**
5. **Usa la Figura 4.26 para justificar el reclamo de que** $4\sqrt{2} < U < 8$**. (*Pista*: Usa el Teorema de Pitágoras).**

He aquí lo que hemos descubierto hasta ahora.

∞ Debido a que todos los círculos son similares, podemos calcular el área y la circunferencia de cualquier círculo si conocemos el área, M, y la circunferencia, U, de la unidad de círculo.

∞ El área M está entre 3 y $3\frac{1}{4}$.

∞ La circunferencia U está entre $4\sqrt{2}$ y 8; de hecho, juzgando de la inclinación de la línea que mejor se ajusta, es muy probable que esté entre 6 y $6\frac{1}{2}$.

Quedan dos preguntas naturales.

1. ¿Podemos obtener mejores estimados para M y U?

2. ¿Están relacionados M y U de alguna manera conveniente?

Resulta que una manera de enfocar la pregunta 1 provee, igualmente, una respuesta sorprendentemente buena a la pregunta 2,}. Este enfoque comienza con el estimado aproximado de U que obtienes de los cuadrados interiores y exteriores de la Figura 4.26. Para obtener un mejor estimado, podemos usar polígonos regulares con más lados. En vez de observar a ambos polígonos interiores y exteriores, usaremos solamente polígonos internos que tienen vértices en la unidad de círculo.

Se les conoce como **polígonos inscritos**. Observa la Figura 4.30 para algunos ejemplos.

Hexágono inscrito   Octágono inscrito   Decágono inscrito

Figura 4.30

La Figura 4.30 muestra que, a mayor cantidad de lados que tenga un polígono regular inscrito, más cercano está su perímetro a la circunferencia del círculo. De manera que el perímetro de uno de estos polígonos con una gran cantidad de lados será una buena aproximación de la circunferencia de la unidad de círculo. Pero, ¿cómo podemos encontrar el perímetro de cualquiera de estos polígonos si sólo sabemos que el radio del círculo es 1? ¡De modo sorprendente, observando primero su área!

El área de un polígono regular inscrito se puede encontrar sumando las áreas de los triángulos. Comienza conectando el centro del círculo a cada vértice del polígono. Ya que el polígono es regular, todos estos triángulos son congruentes. Más aún, cada segmento que conecta el centro con un vértice es un radio de la unidad de círculo. Esto significa que todos los triángulos son isósceles, y los dos lados iguales ambos tienen una longitud de 1.

Figura 4.31

Observemos un ejemplo. La Figura 4.31 muestra un octágono inscrito regular con los triángulos dibujados. La altitud del triángulo inferior derecho está dibujada también.

Juntamos ahora varios hechos simples. ¿Puedes dar una razón para cada una de estas aseveraciones?

- ∞ El área del triángulo está dada por la fórmula $\frac{1}{2}bh$, donde b (la base) es un lado del octágono y h (la altura) es la longitud de la altitud.
- ∞ El área del octágono es 8 veces el área del triángulo, esto es,

$$\text{área del octágono} = 8 \cdot (\tfrac{1}{2}bh)$$

- ∞ El lado derecho de esta ecuación se puede escribir de nuevo como

$$\frac{1}{2}h \cdot (8b)$$

- ∞ El perímetro del octágono es $8b$.
- ∞ La ecuación para el área se puede escribir de nuevo como

$$\text{área del octágono} = \frac{1}{2}h \cdot (\text{perímetro del octágono})$$

Ahora es tu turno. Supongamos que un decágono regular (polígono de 10 lados) es inscrito en una unidad de círculo. Escribe una explicación paso a paso de

$$\textbf{área del decágono} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \textbf{(perímetro del decágono).}$$

(*Pista*: Imita los pasos para el octágono).

No hay nada mágico sobre 8 ó 10 como la cantidad de lados del polígono inscrito. Si tienes un polígono regular inscrito de 547 lados, el argumento funciona exactamente de la misma manera.

- ∞ El área de cada uno de los 547 triángulos está dada por la fórmula $\frac{1}{2}bh$, donde b es un lado del 547-gon y h es la longitud de la altitud.
- ∞ El área del 547-gon es 547 veces el área del triángulo

$$\begin{aligned}\text{área del 547-gon} &= 547 \cdot (\tfrac{1}{2}bh)\\ &= \frac{1}{2}h \cdot (547b)\\ &= \frac{1}{2}h \cdot (\text{perímetro de 547-gon})\end{aligned}$$

El hecho de que esta ecuación es cierta para polígonos regulares inscritos de *cualquier* cantidad n de lados es expresada como

(*) área de n-gon $= \frac{1}{2}h \cdot$ (perímetro de n-gon)

Figura 4.32

He aquí la última pieza del rompecabezas. Observa la Figura 4.32. Nota que, mientras n se hace más grande, están ocurriendo tres cosas.

- El área dentro del polígono es casi igual al área dentro del círculo.
- La altura, h, es casi igual a la del radio, 1.
- El perímetro del polígono es casi igual a la circunferencia del círculo.

Aún en el último círculo de la Figura 4.32, con un polígono de solamente 18 lados, es muy difícil ver las diferencias entre estas medidas. ¡Imagina lo que esto sería para un 360-gon o un 2,000-gon! Esto quiere decir que, para n grandes, el área de la ecuación

(*) n-gon = $\frac{1}{2}h \cdot$ (perímetro de n-gon) es muy cercano a

área de la unidad de círculo = $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot$ (circunferencia de la unidad de círculo).

Pero, el área de la unidad de círculo es M y la circunferencia de la unidad de círculo es U. Si sustituimos M y U dentro de la ecuación anterior, obtenemos

$$M = \frac{1}{2}U$$

Así, nuestros valores desconocidos han sido reducidos de dos a uno.

Si encontramos el valor de ambos U ó M, obtenemos inmediatamente el valor del otro.

1. **En términos de *M*, ¿cuál es la circunferencia de una unidad de círculo?**
2. **En términos de *M*, ¿cuál es la circunferencia de un círculo con un radio de 10 metros? Justifica tu respuesta.**
3. **En términos de *U*, ¿cuál es el área dentro de un círculo con un radio de 6 metros? Justifica tu respuesta.**
4. **¿Es posible que un círculo tenga un área 2*M* y una circunferencia 2*U*? Si es así, encuentra el radio de dicho círculo. Si no es así, explica por qué no.**

Hemos llamado a *M* un número misterioso por una buena razón. Encontrar su valor ha sido un misterio que personas de muchas civilizaciones diferentes han trabajado y se han desconcertado durante cientos de años. He aquí algunos ejemplos.

c. 1650 A.C. — El Papiro Ahmes, de Egipto, declaró que *M* era $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

c. 240 A.C. — Arquímedes mostró que *M* se encuentra entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$.

c. 150 A.C. — Tolomeo, un astrónomo griego, usó $\frac{377}{120}$ para *M*.

c. 480 — El erudito chino Tsu Ch'ung-chih usó $\frac{355}{113}$ para *M*.

c. 530 — El matemático hindú Aryabhata usó $\frac{62,832}{20,000}$ para *M*.

c. 1600 — Un valor decimal para *M* fue calculado para 35 lugares.

1737 — El gran matemático suizo Leonhard Euler nombró *M* con el símbolo por el cuál ha sido conocido desde entonces.

$$\boxed{\pi}$$

1873 — William Shanks de Inglaterra calculó, a mano, un valor decimal para π de 707 lugares. ¡Le tomó más de quince años!

1949 — John von Neumann usó la computadora del gobierno estadounidense ENIAC para calcular π a 2,035 lugares decimales (en 70 horas).

1987 — El profesor Yasumasa Kanada de la Universidad de Tokío calculó π a 134,217,000 lugares decimales en una supercomputadora NEC SX-2.

1991 — Gregory y David Chudnovsky calcularon π a 2,260,321,336 lugares decimales en 250 horas, usando una supercomputadora casera en su apartamento en la ciudad de Nueva York. Esta cantidad de dígitos, impresos en una línea sencilla de tipografía ordinaria de periódico, ¡se extendería desde la ciudad de Nueva York a Hollywood, California![5]

¡No obstante, *ninguno* de estos resultados es su valor *exacto*!

---

[5]Para la historia sobre los Chudnovskys y su máquina fascinante, ver R. Preston, "Profiles", *The New Yorker*, 2 de marzo de 1992.

¿Cuál de los primeros cinco valores en la lista histórica de arriba se acercan más al valor de π en tu calculadora?

Alrededor del 1765 (cuando en América se estaba desarrollando la Guerra Revolucionaria), un matemático alemán llamado Johhan Lambert demostró que π es un **número irracional**; esto es, no puede ser expresado exactamente como una fracción común (la proporción de dos números enteros). Entre otras cosas, esto significó que ninguna expresión decimal para π, no importa cuánto sea extendida, jamás será *exactamente* igual a π. Podemos encontrar decimales tan cercanos como queramos, si estamos dispuestos a ser pacientes y hacer suficiente trabajo, pero, estos serán siempre un poco fuera del valor real del área de la unidad de círculo. Dichas aproximaciones son lo suficientemente buenas para cualquier aplicación del mundo real de este número, pero, ni una es lo suficientemente buena para ser usada todo el tiempo. Esta es la razón por la cual el número misterioso exacto necesita un nombre para sí mismo $-\pi$.

Los primeros mil lugares decimales de π
Figura 4.33

Los dos datos más básicos para recordar sobre π son:

∞ El área de una unidad de círculo es π unidades cuadradas.

∞ La circunferencia de una unidad de círculo es 2π unidades.

Con estos datos puedes encontrar el área y la circunferencia de cualquier círculo, por similitud. Así, el área y la circunferencia de un círculo son funciones de su radio.

Estas funciones pueden ser escritas como fórmulas (recetas algebraicas) que te facilitan encontrar el área y la circunferencia de cualquier círculo a partir de su radio.
Área del radio r de un círculo: $A(r) = \pi r2$
Circunferencia del radio r de un círculo: $C(r) = 2\pi r$

1. **Explica lo que significa decir que el área y la circunferencia de un círculo son funciones de su radio.**
2. **Explica cómo encontrar el radio de un círculo a partir de su circunferencia o de su área. Ilustra tu explicación con un ejemplo de cada proceso.**
3. **(a) ¿Puedes escribir una función que provea una fórmula para encontrar el radio de un círculo a partir de su área? Si puedes, házlo. Si no puedes, explica por qué no.**

   (b) ¿Puedes escribir una función que provea una fórmula para encontrar el radio de un círculo a partir de su circunferencia? Si puedes, házlo. Si no puedes, explica por qué no.

PHOTO

Conjunto de ejercicios: 4.4

1. Cada línea de la tabla en la Figura 4.34 contiene uno de los siguientes datos de información sobre un círculo en particular:

radio, diámetro, circunferencia, área

Copia esta tabla en un pedazo de papel. Entonces, completa los otros tres datos para cada círculo. Escribe tus respuestas en términos de π; no proveas aproximaciones.

Círculo	**Radio**	**Diámetro**	**Circunferencia**	**Área**
	7 pulg.			
		30 cm.		
				100π millas cuadradas
	π pulg.			

Figura 4.34

2. En Pietro's Pizza, una pizza de queso de 8 pulgadas se vende a \$4.25, la de 12 pulgadas se vende a \$8.50, y la de 14 pulgadas se vende a \$10.25.
   (a) Algunos estudiantes que no han estudiado **MATH** *Connections* pensaron que serían capaces de obtener una pizza de 16 pulgadas por \$8.50, ya que una pizza de 8 pulgadas cuesta \$4.25. Explícales por qué esto no es razonable.
   (b) Si el precio fuera proporcional al área (basado en el tamaño de 8 pulgadas), ¿cuál *debía ser* el costo de una pizza de 16 pulgadas?
   (c) Si el precio fuera proporcional al área (basado en el tamaño de 8 pulgadas), ¿cuál tamaño de pizza debería costar \$8.50?
3. Las ruedas de bicicleta son clasificadas generalmente por sus diámetros. Para muchas bicicletas de turismo, $27\frac{1}{2}$ pulgadas es un tamaño común.
   (a) ¿Cuál es la circunferencia de una rueda de $27\frac{1}{2}$ pulgadas. Expresa tu respuesta en términos de π y además como un decimal, redondeado a dos lugares.
   (b) Cuando una bicicleta con ruedas de este tamaño viaja una milla, ¿cuántas veces cada rueda da una vuelta completa? Explica cómo obtuviste tu respuesta.
   (c) El tamaño dado aquí asume que la rueda está completamente inflada. Asume que la rueda está un poco suave, así que su diámetro es actualmente $\frac{1}{4}$ de pulgada menos de su tamaño clasificado. ¿Cuántas veces más debe esta rueda dar vueltas en una milla que la rueda completamente inflada de la parte (b)?

PHOTO

4. Lee y Avery trabajan para Pi in the Sky Landscaping, una compañía que se especializa en jardines redondos.
   (a) ¿Cuánto cercado necesitarán para circundar completamente un jardín redondo con un diámetro de 20 pies? Redondea tu respuesta a dos lugares decimales.
   (b) ¿Cuánto cercado necesitarán para circundar completamente un jardín semicircular con un diámetro de 20 pies? Redondea tu respuesta a dos lugares decimales (*Pista*: Dibuja un boceto).
5. Una instalación de un radar del tiempo Doppler está ubicado en la cima del Talcott Mountain Science Center en Avon, Connecticut. Este radar detecta la precipitación (nieve, lluvia, etc.) enviando un rayo microonda hacia el horizonte y esperando por las reflexiones. Si no hay precipitación presente, el rayo microonda nunca regresa, pero, si hay lluvia, agua nieve, o nieve en algún punto del ámbito, las reflexiones regresan poco tiempo después, como un eco.

El radar calcula la cercanía de la precipitación midiendo el tiempo que le toma a las reflexiones regresar, y calcula la intensidad de la precipitación a partir de la cantidad de energía de microonda que regresa. La onda da vueltas continuamente, explorando todo el horizonte cada 2.5 minutos.

(a) El operador puede seleccionar el alcance (radio) del radar. En un alcance bajo, el radio del rayo tiene solamente alrededor de 10 millas; en un alcance alto, el radio del rayo tiene hasta 300 millas. ¿Cuáles piensas que son las ventajas de operar el radar en el alcance alto? ¿Cuáles son las ventajas de operar el radar en el alcance bajo? ¿Para cuáles condiciones del tiempo piensas que el operador seleccionaría el alcance alto? ¿Para cuáles condiciones del tiempo piensas que el operador seleccionaría el alcance bajo?

(b) Calcula el área total cubierta en millas cuadradas cuando el alcance del radar es 300 millas.

(c) Calcula el área total cubierta en millas cuadradas cuando el alcance del radar es 10 millas.

(d) El radio en alcance alto es 30 veces el radio en alcance bajo. ¿Es el área cubierta en el alcance alto 30 veces el área cubierta en el alcance bajo? Explica por qué sí o por qué no.

(e) Usa un mapa para dibujar un círculo con un radio de 300 millas centrado en Avon, Connecticut. ¿Cuáles estados están incluidos en la cobertura? Usa un mapa para dibujar un círculo con un radio de 10 millas centrado en Avon, Connecticut. ¿Cuáles ciudades y pueblos están incluidos en la cobertura del radar?

PHOTO

PHOTO

6. Haz una gráfica mostrando cómo la circunferencia de un círculo varía con el radio. Coloca el radio en el eje de x, y la circunferencia en el eje de y. En otro par de ejes, haz una gráfica para mostrar cómo el área varía con el radio. Coloca el radio en el eje de x y el área en el eje de y. Escribe una ecuación para cada gráfica. Decimos que la circunferencia *varía directamente como* el radio y que el área *varía directamente como el cuadrado* del radio. ¿Cómo son diferentes las gráficas? ¿Cómo son diferentes las ecuaciones?

7. Mary hace y vende topes de mesa redondos para cortar carne. El más grande que ella hace generalmente, tiene un diámetro de 4 pies, pero, ella toma órdenes por encargo para tamaños más grandes. El Sr. Washington quiere ordenar un tope de mesa que tendría 8 pies de diámetro, pero, él teme que este sea muy pesado. Si un tope de mesa de 4 pies pesa 38 libras, ¿cuánto pesará un tope de mesa de 8 pies con el mismo grosor? Explica por qué tu respuesta *no* es dos veces el peso del tope de 4 pies.

8. El valor aproximado usado para π afecta casi todo el trabajo numérico con los círculos. Cuando trabajas con círculos grandes o necesitas medidas muy precisas, el valor que escoges puede tener un gran efecto en los resultados que obtengas. Sin embargo, después de 10 ó veinte lugares decimales, los cambios en los dígitos raramente tienen un efecto práctico en modo alguno. Las siguientes preguntas ilustran estas ideas:

El diámetro de la Tierra en el Ecuador tiene cerca de 8,000 millas. Para este problema, asume que tiene exactamente 8,000 millas.

(a) Calcula la circunferencia de la Tierra en el Ecuador usando el valor de π propuesta por cada una de las siguientes personas. Redondea tus respuestas a la décima de milla más cercana.

(i) el escriba egipcio Ahmes
(ii) el astrónomo griego Tolomeo
(iii) el erudito chino Tsu Ch'ung-chih
(iv) el matemático hindú Aryabhata
(v) las personas que programaron tu calculadora

(b) La mayoría de las calculadoras modernas expresan π a 10 lugares: 3.141592654. Encuentra la circunferencia de la Tierra en el Ecuador usando esto para π. Entonces, cambia el último dígito de esta aproximación de π a 0 y encuentra nuevamente la circunferencia. ¿Cuál es la diferencia entre tus dos valores para la circunferencia en millas? ¿En pulgadas?