4.5 Segmentos de círculos

En esta sección verás cómo las fórmulas del área y la circunferencia para un círculo pueden ser usadas para encontrar longitudes, perímetros, y áreas de segmentos de círculos y discos.

Puesto que un círculo es una curva cerrada, tomando un sólo punto no lo romperá en dos segmentos separados, pero, tomando dos puntos lo hará. Es decir, cualesquiera dos puntos en un círculo lo rompen en dos segmentos, llamados **arcos**. (Véase la Figura 4.35). Si los segmentos no tienen el mismo tamaño, al más grande se le conoce como un **arco principal** y al más pequeño se le conoce como un **arco menor**. ¿Cómo se les conoce si tienen el mismo tamaño?

Dos puntos   Arco principal   Arco menor

Figura 4.35

Los radios del centro a los dos extremos finales de un arco forman un ángulo conocido como el ángulo central del arco. Estos radios y el arco encierran una región llamada cómo un **sector** del círculo. El arco y la cuerda entre sus puntos finales incluyen una región llamada (desafortunadamente) un **segmento** del círculo. Las regiones sombreadas en la Figura 4.36 son el sector y el segmento del arco menor; las regiones sin sombras adentro de los círculos de las partes (b) y (c) son el sector y el segmento del arco principal. Algunas veces, en vez de decir arco principal o arco menor, describimos un arco por la cantidad de grados de su ángulo central.

(a) Ángulo central   (b) Sector   (c) Segmento

Figura 4.36

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Usar la medida del ángulo central para encontrar la longitud de cualquier arco circular

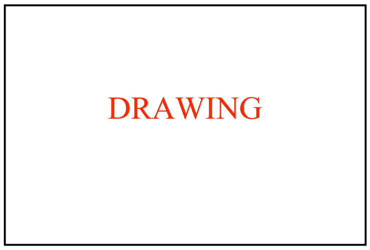
Usar la medida del ángulo central para encontrar el área de cualquier sector de un círculo

Encontrar el área y sectores de un anillo.

La relación entre el área de un sector y el ángulo central de su arco es más nítida que la relación entre el área de un segmento y el ángulo central de su arco. ¿Qué significa nítido en este caso? (*Pista*: Piensa sobre las proporciones de las medidas).

He aquí un relato para ilustrar cómo conociendo sobre los arcos y los sectores puede ser útil.

Una pista de Go-Kart (Parte I)



Nip y Tuck, los gemelos corredores de Go-Kart, han decidido construir una pista de Go-Kart. Ellos han encontrado un diseño simple en su revista preferida de Go-Kart. Su diagrama es mostrado en la Figura 4.37.

Las notas incluidas con el diagrama explican que las curvas son arcos circulares, para permitir que la pista sea fácil de construir. La línea oscura es el centro de la pista. Las líneas entrecortadas son los bordes, separados 10 pies en cada lado del centro, por todo el alrededor. Las notas continúan describiendo cómo inclinarse en las curvas, cómo facilitar ligeramente la curvatura al conectar las partes circulares a las rectas, etc., pero, estas cosas no nos preocuparán aquí.

Los cortes en los caminos rectos, mostrados por las líneas onduladas, indican que la longitud de la pista puede ser ajustada, dependiendo de cuán largas están hechas estas partes rectas.

Figura 4.37

Como un primer paso para construir su pista de Go-Kart, Nip y Tuck deciden que necesitan un modelo a escala más grande de la línea central de la Figura 4.37. Haz uno para ellos. Dibújalo en un pedazo de papel cuadriculado de $\frac{1}{4}$ de pulgada con la escala de $\frac{1}{4}$ pulgada = 5 pies.

(*Pista*: Si das vuelta de lado a tu pedazo de papel cuadriculado de $8\frac{1}{2}?11$ pulgadas y comienzas colocando el punto *A* aproximadamente 3 pulgadas hacia abajo de la esquina superior izquierda y dos pulgadas a la derecha, debes tener suficiente espacio).

A Nip y Tuck le gusta este diseño de pista porque su longitud puede ser ajustada. Ellos quieren construir una pista con exactamente $\frac{1}{10}$ de milla de longitud. Esto les permitirá resolver fácilmente la velocidad promedio de cada Go-Kart en millas por hora. ¿Ves cómo?

¿Cuán largas deben hacer las rectas?

La pregunta de Nip y Tuck sobre cuán largas hacer las rectas es difícil de contestar. Rómpela en preguntas más pequeñas que son más fáciles de manejar. Entonces, contesta por lo menos una de ellas.

Antes de decidir cuán largas hacer las rectas de Nip y Tuck, tenemos que conocer las longitudes de los cuatro arcos circulares en la pista. Éstos están mostrados separadamente en la Figura 4.38. Tómalos uno a la vez.

Sugerencia

Haz preguntas simples. Cuando te enfrentes a una pregunta que no puedas contestar, haz otras preguntas sobre ella hasta que encuentres una que *puedas* contestar. Entonces, trabaja desde ahí.

Los arcos circulares

Figura 4.38

Copia la tabla de la Figura 4.39. Mientras trabajas estas preguntas, lleva un registro de tus respuestas completando tu copia de la Figura 4.39. Usa tu calculadora para ayudarte con la aritmética, y redondea tus respuestas a un lugar decimal.

1. **¿Cuáles de las cuatro longitudes de arco de la Figura 4.38 piensas que es más fácil de encontrar? ¿Por qué?**
2. **¿Puedes pensar en una manera para encontrar cualquiera de estas longitudes? Si puedes, házlo, y explica tu método.**
3. **Si completaste el círculo centrado en *D*, ¿cuál sería su circunferencia?**
4. **¿Cuál es la longitud del arco de 180º centrado en *D*? Explica.**
5. **Si completaste el círculo centrado en *C*, ¿cuál sería su circunferencia?**
6. **¿Cuál es la longitud del arco de 90º centrado en *C*? Explica.**
7. **Si completaste el círculo centrado en *B*, ¿cuál sería su circunferencia?**
8. **¿Cuál es la longitud del arco de 120º centrado en *B*? Explica.**
9. **Usa tu razonamiento de las preguntas anteriores para describir un proceso para encontrar la longitud de cualquier arco a partir de su radio y ángulo central. Explica tu proceso en palabras, y luego, en una fórmula. Usa tu proceso para encontrar la longitud del arco de 210º centrado en *A*.**

Centro	Radio (pies)	Circunferencia	Ángulo central	Longitud del arco

Figura 4.39

He aquí una manera de describir el patrón en la Figura 4.39:

La longitud de un arco circular es proporcional a la medida de su ángulo central.

Por ejemplo, para encontrar la longitud, L, de un arco de 54º con circunferencia de 100π, podemos resolver la proporción

$$\frac{L}{100\pi} = \frac{54\infty}{360\infty}$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por 100π (la circunferencia), obtenemos

$$L = \frac{54}{360} \cdot 100\pi$$

En otras palabras, para encontrar la longitud del arco, expresa sólo la medida del ángulo central como una fracción de 360º, luego, toma esa fracción de la circunferencia.

Ahora que tenemos las longitudes de todos los arcos circulares, veamos qué otra cosa necesitamos para poder encontrar las longitudes de las rectas.

Observa nuevamente la Figura 4.37. La recta de arriba es más larga que la recta de abajo. ¿Cuán más larga? Para resolver esto, ayuda a dibujar unos cuantos puntos y líneas más, de la manera siguiente:

∞ **Marca dos puntos más, *E* y *F*, en tu dibujo a escala de la pista. *E* es el extremo superior del arco circular centrado en *A*. Extiende el radio vertical del arco en *C* hasta que interseque la recta de arriba; *F* es el punto de intersección. ¿Ves que la longitud de *EF* es la diferencia entre las rectas de arriba y de abajo?**

∞ **Extiende *AE* de arriba hacia abajo y *BC* a la izquierda hasta que se intersequen. Llama al punto de intersección *G*.**

Tu dibujo debe lucir ahora como la Figura 4.40.

1. **¿Por qué son iguales las longitudes de *EF* y *GC*?**
2. **¿Cuán largo es *BC*? ¿Por qué?**
3. **¿Cuán largo es *AB*? ¿Por qué?**
4. **¿Cuán largo es *GB*? ¿Por qué?**
5. **¿Cuán largo es *GC*? ¿Por qué?**
6. **¿Cuán largo es *EF*? ¿Por qué?**

Figura 4.40

Ahora tenemos todas las piezas necesarias para contestar la pregunta de Nip y Tuck. Aquí está nuevamente:

Nip y Tuck quieren construir su pista para Go-Kart con exactamente $\frac{1}{10}$ de milla de longitud. ¿Cuán largas deben hacer las rectas?

Una pista de Go-Kart (Parte II)

PHOTO

Con un diseño de pista establecido, Nip y Tuck están planificando el costo de su construcción. Ellos quieren cubrir el campo interior (la región adentro de la pista) con césped (grama). El césped se vende por pie cuadrado y es costoso, así que necesitan una medida exacta del área del campo interior.

Ellos comienzan dibujando el borde interior de la pista, separado 10 pies de la línea del centro a la redonda. Entonces, ellos dividen el campo interior en 7 pedazos y escriben las medidas para todas las longitudes y ángulos que ellos conocen. La Figura 4.41 muestra su dibujo. Los números en círculos indican las 7 regiones. Para encontrar el área del campo interior, ellos se proponen calcular el área de cada región separadamente, luego, las suman.

Campo interior de la pista de Go-Kart

Figura 4.41

Región	**Forma**	**Área (pies cuadrados)**
1	sector 180º	
2	rectángulo	
3	sector 90º	
4	rectángulo	
5	?	
6	cuadrilátero	
7	sector 210º	
	Área total	

Figura 4.42

Copia la tabla en la Figura 4.42. Mientras trabajas con estas preguntas, lleva un registro de tus respuestas completando tu copia de la tabla. Usa tu calculadora para ayudarte con la aritmética, y redondea tus respuestas a un lugar decimal.

1. **Calcula las áreas de los dos rectángulos; éntralos en las líneas 2 y 4 de la tabla.**
2. **Si completaste el círculo centrado en *D*, ¿cuánta área incluiría? ¿Qué fracción de esta área está en la región 1? ¿Cuál es el área de la región 1?**
3. **Si completaste el círculo centrado en *C*, ¿cuánta área incluiría? ¿Qué fracción de esta área está en la región 3? ¿Cuál es el área de la región 3?**
4. **Si completaste el círculo centrado en *A*, ¿cuánta área incluiría? ¿Qué fracción de esta área está en la región 7? ¿Cuál es el área de la región 7? ¿Cómo lo sabes? ¿Cuál es el área de la región 7?**
5. **El área de la región 6 es aproximadamente 161.2 pies cuadrados. ¿Cómo Nip y Tuck lo encontraron?**

6. **Tenemos pendiente la región más difícil para lo último. Piensa en ello como un rectángulo, *ZYVW*, con una esquina triangular, *XWB* cortada y luego con una "mordida" tomada de éste.**
   - **(a) ¿Cuán largo es *ZY*? ¿Cómo lo sabes?**
   - **(b) ¿Cuál es el área del rectángulo *ZYVW*?**
   - **(c) ¿Cuál es el área del triángulo *XBW*? ¿Cómo lo encontraste?**
   - **(d) ¿Cuál es el área de la mordida circular, el sector centrado en *B* de 120º? ¿Cómo lo encontraste?**
   - **(e) ¿Cuál es el área de la región 5?**
7. **¿Cuál es el área total dentro de la pista de Go-Kart?**

Anteriormente en esta sección describimos el patrón en la Figura 4.39 diciendo que la longitud de un arco circular es proporcional a su ángulo central. ¿Cuál es la aseveración análoga para el área? ¿Piensas que es siempre verdadera? ¿Por qué sí o por qué no?

Una pista de Go-Kart (Parte III)

PHOTO

Ahora Nip y Tuck tienen que ordenar el pavimento para su pista de Go-Kart. Esto, también, es vendido por pie cuadrado, así que tienen que calcular la cantidad de pies cuadrados en su pista de 20 pies de ancho.

"Yo se cómo hacer eso", dice Nip. "Si calculamos el área de la región definida por el borde exterior de la pista y luego restamos el área del campo interior, tendremos el área de la misma pista".

"¡Puff!" dice Tuck, frunciendo el ceño, "¡no puedo aguantar llevar a cabo otro cálculo con todas esas piezas diferentes! Tengo una mejor idea. Pretendamos que la pista completa es recta. En ese caso, entonces, todo lo que tendríamos que hacer es multiplicar su largo por su ancho, y tendríamos nuestra respuesta".

"Pero, no es recta", dice Nip. "En cada curva, el borde interior es más corto que el borde exterior. ¿Podrán todas estas diferencias balancearse exactamente?"

"Bueno, quizás no exactamente", admite Tuck, "pero, deberían estar bastante cerca, ¿no crees?"

"No sé", contesta Nip, "pero, debemos asegurarnos antes que no nos quedemos atascados con un camión adicional de asfalto o no tengamos suficiente para terminar la pista".

Podemos ayudar a Nip y Tuck aplicando algunos de los patrones de pensamiento que vimos en esta sección de una manera creativa. Primero, simplifiquemos el problema de dos maneras.

- ∞ Todas las curvas en la pista son arcos circulares, así que, en vez de tratar con toda la pista de una vez, observaremos un arco circular sencillo.
- ∞ Puesto que los círculos son asimétricos con respecto a todas las rotaciones sobre su centro, si la idea del balance funciona para un sendero circular completo, funcionará proporcionalmente para cualquier sector.

Así, tiene sentido comenzar con un ejemplo de una ruta circular, tal como la dibujada en la Figura 4.43. En este caso, la línea del centro de la pista tiene un radio de 30 pies y el ancho es de 20 pies (igual que la pista del Go-Kart). Esta pista es la región entre dos círculos concéntricos. Parece una arandela grande. A dicha figura se le conoce como un *anillo (anulus)*. Calcularemos el área de esta pista circular de dos maneras, la manera de Nip y la manera de Tuck.

Términos
Annulus es la palabra en latín para anillo.

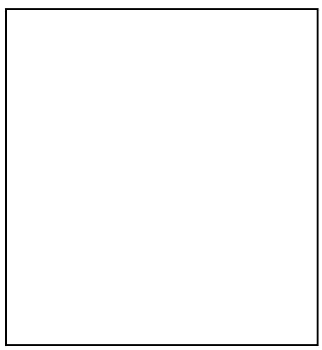


Figura 4.43

La manera de Nip:

El área dentro del círculo exterior es $\pi \cdot 40^2 = 1600\pi$. Resta de esta, el área dentro del círculo interior, la cual es $\pi \cdot 20^2 = 400\pi$. La diferencia es 1200π.

La manera de Tuck:

Si enderezáramos esta pista, sería como un rectángulo de 20 pies de ancho y tan largo como la línea del centro, la cual es la circunferencia de un círculo con un radio de 30 pies: $2\pi \cdot 30 = 60\pi$. Así, el área es $20 \cdot 60\pi = 1200\pi$.

¡Las dos respuestas son *exactamente* iguales!

¿Funciona esto todo el tiempo? Es decir, ¿puedes encontrar el área de *cualquier* anillo tomando la circunferencia de círculo del medio y multiplicándolo por su ancho? Trata algunos otros casos. La primera línea de la tabla en la Figura 4.44 describe otro anillo; las próximas tres líneas dejan espacio para que completes ejemplos que tú escojas. La última línea es para una descripción algebraica que aplica a cualquier anillo. En la última línea, ¿qué representa *s*? Copia y completa esta tabla.

Anillo		**Área**	
Radio del medio	Grosor	Manera de Nip	Manera de Tuck
50 m	12 m		
r	$2s$		

Figura 4.44

¿Te convence tu trabajo de completar la Figura 4.44 que el área de cualquier anillo es el producto de la circunferencia de su círculo del "medio" y su grosor? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Piensas que la Figura 4.44 *prueba* esta aseveración? Si es así, ¿por qué? Si no, ¿qué más se necesita?

¿Cuántos pies más de asfalto se necesitarán para pavimentar la pista para Go-Karts de Nip y Tuck.

He aquí tres hechos para recordar sobre las partes de los círculos:

1. La longitud de un arco es proporcional a la medida de su ángulo central. Específicamente, un arco de n° tiene una longitud de $\left(\frac{n}{360}\right)C$, donde C es la circunferencia del círculo.

2. El área de un sector es proporcional a la medida de su ángulo central. Específicamente, un sector de n° tiene un área de $\left(\frac{n}{360}\right)A$, donde A es el área del círculo.

3. El área de un anillo es el producto de la circunferencia de su círculo del medio y su grosor.

Conjunto de ejercicios: 4.5

1. Un limpiaparabrisas gira a través de un ángulo de 110º. El limpiaparabrisas tiene un brazo de 20 pulgadas fijado al medio de una cuchilla de 16 pulgadas. Véase la Figura 4.45.

- **(a)** ¿Cuántas pulgadas cuadradas de parabrisas esta cuchilla limpiará? Redondea tu respuesta a un lugar decimal.
- **(b)** La cuchilla de 16 pulgadas es reemplazada por una cuchilla de 18 pulgadas.
  - **(i)** ¿Cuántas *más* pulgadas cuadradas limpiará esta cuchilla? Redondea tu respuesta a un lugar decimal.
  - **(ii)** ¿Cuál es al aumento en porcentaje sobre la cuchilla de 16 pulgadas? ¿Es este aumento el mismo porcentaje que el aumento en longitud? Explica.

Figura 4.45

2. Un arquitecto de paisajes está planificando el camino de acceso pavimentado diagramado en la Figura 4.46 y tiene estas especificaciones de diseño:

∞ Todos los tres arcos son circulares.

∞ El ángulo central del arco centrado en *A* es 100º; su radio a la línea del centro del camino es 48 pies.

∞ Los arcos centrados en *B* y *C* son congruentes y tienen el mismo radio: 16 pies a la línea central del camino.

∞ La distancia recta entre los dos arcos pequeños es 98 pies.

∞ La distancia recta entre los arcos más grandes y más pequeños es 31.5 pies en cada lado.

PHOTO

∞ El camino de acceso es 14 pies de ancho.

∞ La entrada al camino de acceso es un rectángulo que mide 20 por 18 pies.

Contesta las siguientes tres preguntas. Ven preparado para justificar tus respuestas.

(a) ¿Cuál es el tamaño del ángulo de los arcos centrados en *B* y en *C*?

(b) ¿Cuán larga es la línea del centro del redondel del camino de acceso? Redondea tu respuesta a un lugar decimal.

(c) ¿Cuán grade es el total del área a ser pavimentada?

Pillar = Columna Gate = Entrada

Figura 4.46

3. Nip y Tuck diseñaron su pista de Go-Karts para que tuviera exactamente $\frac{1}{10}$ de milla alrededor, de manera que fuera fácil calcular la velocidad promedio de cada Go-Kart desde el momento que da la vuelta a la pista. Ellos usan un cronómetro para obtener el tiempo de cada vuelta del Go-Kart en segundos. Escribe una función para la calculadora de Nip y Tuck que pueda convertir automáticamente estos tiempos a millas por hora.

Podrías comenzar contestando estas preguntas. ¿Cuántos segundos hay en una hora? Si el tiempo de una vuelta completa de un Go-Kart es 60 segundos, ¿cuánto tiempo le tomará al Go-Kart viajar una milla a la misma velocidad promedio? ¿Cuántas millas viajaría en una hora a esa velocidad? ¿Qué tal si el tiempo de una vuelta completa es 90 segundos? ¿Qué tal si es *x* segundos?

4. Al comienzo de esta sección, viste que un *segmento* de un círculo es parte del disco definido por un arco y su cuerda.

(a) ¿Cuál es una buena estrategia para encontrar el área de un segmento?

(b) Trata tu estrategia: Encuentra el área de un segmento de 80º de un círculo con radio de 10 pulgadas. Redondea tu respuesta a dos lugares decimales. Las medidas en grados aquí se refieren a la longitud del arco del segmento. Comienza dibujando un diseño preliminar.

(c) En la parte (b), ¿cómo encontraste el área del triángulo isósceles que tiene la cuerda en su base? ¿Lo dividiste en dos triángulos rectángulos y usaste funciones trigonométricas? Si es así, ¿a cuál ángulo le aplicaste esas funciones?

(d) Encuentra el área de un segmento de un círculo de 140º con radio de 15 pulgadas. Esta vez, usa el seno y el coseno de la mitad del ángulo central para encontrar el área del triángulo isósceles con la cuerda como su base. Redondea tu respuesta a dos lugares decimales.

5. Este problema generaliza el problema 4. Encuentra el área de un segmento de un círculo θ º con radio r. Tu respuesta debe ser una fórmula escrita en términos del radio r y la *mitad* del ángulo central θ º, el cual llamaremos α (alfa).

Símbolos
Alfa, α, es la primera letra del alfabeto griego, como nuestra letra a. Las letras griegas son usadas a menudo en las matemáticas como símbolos para los ángulos (y otras cosas).

Comienza observando la Figura 4.47, la cual muestra un segmento AB. Trata de encontrar una fórmula para el área del segmento definido por la cuerda AB y el arco menor AB en términos de r y α. Trabaja a través de los pasos que usaste para la parte (d) del problema 4, sustituyendo r por el radio y α para la mitad del ángulo central. Observa, entonces, si puedes poner todos estos pasos juntos en una fórmula simple justa.

Figura 4.47