4.6 Ángulos inscritos

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Definir e identificar ángulos inscritos

Usar la medida del ángulo central para encontrar la medida de un ángulo inscrito que interseca el mismo arco

Explicar por qué cualquier ángulo inscrito en un semicírculo debe ser un ángulo recto.

Gran parte de la sección anterior depende del hecho que cada arco de un círculo corresponde a exactamente un ángulo central, y el tamaño de un arco puede ser descrito por el tamaño de su ángulo central. Así, un arco de 40º es un arco con un ángulo central de 40º. Los arcos circulares están relacionados también, a otro tipo de ángulo. Si conectas los dos extremos de un arco con algún punto en el círculo, pero, fuera del arco, obtienes un ángulo. Por supuesto, puedes obtener muchos ángulos a partir de un arco sencillo de esta manera. (Véase la Figura 4.48). Debido a que todos están ligados al mismo arco, tiene sentido preguntarse si ellos tienen algo en común. Exploremos esta pregunta.

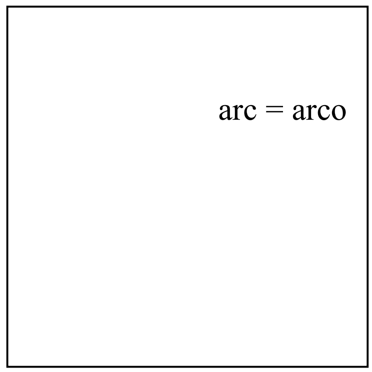

Figura 4.48

Términos

Inscribir significa dibujar o escribir dentro de algo. Piensa en una *inscripción* en un anillo o en un medallón. *Intersecar* algo quiere decir cortarlo o pararlo en un lugar en particular.

Dos términos nuevos harán nuestras descripciones más simples para escribir. Un ángulo formado por dos cuerdas con un extremo en común se le conoce como un **ángulo inscrito**.Decimos que un ángulo inscrito *interseca* el arco opuesto a su vértice. La Figura 4.48 muestra cuatro ángulos inscritos, en los puntos P, Q, R y S. Todos intersecan el mismo arco, AB.

EXPLORACIÓN 1

PREPARACIÓN

Necesitas cuatro hojas de papel de pastelería y un bolígrafo o un lápiz suave y agudo que pueda dibujar líneas oscuras y claras.

- Dibuja cuatro círculos congruentes, uno en cada hoja de papel de pastelería. Marca los centros claramente.
- En uno de estos círculos, marca claramente un arco de tu preferencia. Esto funcionará mejor si tu arco tiene entre 45º y 120º.
- Coloca otra pieza de papel de pastelería sobre la primera de manera que los círculos concuerden. Dibuja un ángulo inscrito que interseque el arco.
- Repite el paso anterior con las otras dos hojas de papel de pastelería. Dibuja cada vez un ángulo inscrito *diferente* que interseque el mismo arco.

PREGUNTA

¿Cómo se comparan en tamaño los diferentes ángulos inscritos?

Para obtener una idea de esto, coloca las hojas de papel de pastelería en una pila de manera que los círculos y los vértices de los tres ángulos coincidan. Entonces, haz una conjetura sobre los tamaños de los ángulos inscritos que intersecan el mismo arco.

EXPLORACIÓN 2

PREPARACIÓN

Para esta **Exploración** necesitas una hoja en blanco de papel regular, un compás u otra herramienta para dibujar círculos, y un transportador.

- Dibuja un círculo grande en tu papel y marca claramente un arco, *AB*, de tu preferencia.
- Dibuja el ángulo central del arco *AB*, mídelo al grado más cercano, y escribe la medida.

PHOTO

- Dibuja cuatro ángulos inscritos diferentes que intersequen el arco *AB*. La Figura 4.49 es un ejemplo de un dibujo hecho con estas instrucciones.
- Mide cada uno de los cinco ángulos inscritos al grado más cercano y escribe tus medidas.

Un ángulo central y cinco ángulos inscritos para el arco *AB*

Figura 4.49

PREGUNTAS

1. ¿Cómo piensas que los cinco ángulos inscritos están relacionados entre sí? ¿Estás seguro? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Has tomado en consideración el error por medida?

2. ¿Cómo piensas que los cinco ángulos inscritos están relacionados con el ángulo central? ¿Estás seguro? ¿Por qué sí o por qué no?

3. Si tu arco es un semicírculo, ¿cuál es la medida de su ángulo central?

4. A base de tus respuestas a las preguntas 1 y 2, ¿cuál piensas es la medida de un ángulo inscrito en un semicírculo?

5. ¿Obtendrás los mismos resultados si comienzas con un óvalo en vez de un círculo? Trátalo y observa.

Los principios que has observado en estas **Exploraciones** aplican a una variedad de cosas sorprendentes. He aquí sólo un ejemplo; tomado de la industria del espectáculo.

Las unidades de iluminación de escenario en lo alto vienen en tres tamaños estándares: 20º, 30º, y 40º. Los valores de grados se refieren al cono más grande de luz que la unidad produce.Si cortamos este cono tridimensional por la mitad, por decirlo así, obtenemos una sección transversal triangular, como en la Figura 4.50. Los tres tamaños se refieren al tamaño del ángulo de este triángulo en la fuente de luz.

Los diseñadores de decorado artístico colocan las unidades de luz en ángulos diferentes al escenario para efectos especiales de iluminación. Uno de sus problemas es colocar cada unidad de manera que el máximo del cono de iluminación cubra toda el área de la representación, pero no se extienda más allá en el público u otras áreas fuera del escenario. He aquí un caso particular:

light = iluminación

stage = escenario

A stage light = Una iluminación de escenario

Figura 4.50

PHOTO

Mike Mega Watt está montando las luces para un concierto de rock. El escenario mide 20 pies desdeel frente a la parte de atrás. Él quiere que la iluminación de la mitad del escenario venga de la parte superior de atrás, directamente de arriba, y de la parte de arriba del frente. Tres unidades de 30º están disponibles para esta parte del trabajo. ¿Dónde las colocará él?

Afortunadamente, Mike estudió geometría (como hacen todos los diseñadores artísticos). Él recuerda que todos los ángulos inscritos para un arco circular tienen la misma medida, así que él decide pensar en sus unidades de iluminación como ángulos inscritos de 30º. Pero, ¿para cuál círculo?

Él piensa en la profundidad de 20 pies del escenario como una cuerda del círculo porque eso es exactamente lo que él quiere que los ángulos de iluminación intersequen. El ángulo central de esta cuerda (y su arco) debe ser dos veces el ángulo inscrito, así que el ángulo central debe ser 60º. Mike dibuja un triángulo isósceles, usando la línea del escenario de 20 pies como la base. Cada ángulo de base debe ser de 60º, así que dibuja líneas a un ángulo de 60º desde cada extremo de la cuerda, inclinádose uno hacia cada uno. El lugar donde se cruzan es el centro del círculo que él quiere. ¿Por qué? Él dibuja el círculo con el punto del centro y el radio determinados por un borde del escenario. (Véase la Figura 4.51). Él puede colocar sus luces en cualquier lugar en ese círculo.

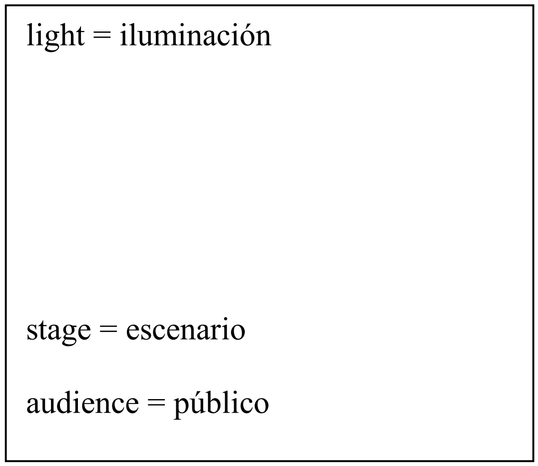

Figura 4.51

1. **¿Cómo sabe Mike Mega Watt que el triángulo que él quiere es isósceles?**
2. **¿Cómo sabe que sus ángulos de base son de 60°?**
3. **¿Cuál es la longitud del círculo de Mike?**
4. **Si Mike quiere colocar iluminación directamente arriba, tendrá que construir andamios para sostenerla. ¿Cuán alta sobre el escenario debe estar la iluminación?**
5. **Si él no quiere que las luces estén tan lejos del escenario, debe reemplazar sus unidades de iluminación de 30° con unidades de 20° o con unidades de 40°? ¿Por qué?**

1. **Cuando Mike Mega Watt examina nuevamente sus unidades de iluminación, encuentra que su tamaño es de 20°. Haz nuevamente la Figura 4.51 para este tamaño. Especifica el tamaño de los ángulos del triángulo, el radio del círculo, y la altura de las luces más altas. Redondea tus respuestas a un lugar decimal.**
2. **A Mike no le gusta el diseño de las unidades de 20°; el andamio tendría que colocarse muy alto. Él se las ingenia para cambiarlas por tres unidades de 40°. Haz nuevamente la Figura 4.51 para este tamaño. Especifica el tamaño de los ángulos del triángulo, el radio del círculo, y la altura de las luces más altas. Redondea tus respuestas a un lugar decimal.**

He aquí tres datos importantes sobre los ángulos inscritos:

1. Todos los ángulos inscritos que intersecan el mismo ángulo tienen el mismo tamaño.

2. La medida de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central de su arco intersecado.

3. Cualquier ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

No hemos justificado en realidad estas aseveraciones, excepto mirando algunos ejemplos. La clave para las tres es la aseveración 2. Si conocemos eso, entonces, las aseveraciones 1 y 3 siguen fácilmente. Terminamos esta sección demostrándote un caso de la aseveración 2. Los otros casos pueden ser demostrados a partir de este. Aparecerán en el conjunto de ejercicios.

He aquí lo que demostraremos ahora:

> La medida de un ángulo inscrito *con un lado pasando a través del centro del círculo* es la mitad del ángulo central de su arco intersecado.

Figura 4.52

La Figura 4.52 ilustra este caso. El arco *AB* es intersecado por el ángulo inscrito en *P*. El ángulo *AOB* es el ángulo central correspondiente. Queremos mostrar que

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

Contesta estas preguntas para completar la prueba.

1. ¿Qué tipo de triángulo es ΔPOA? ¿Por qué?

2. ¿Como están relacionados $\angle APB$ y $\angle PAO$? ¿Por qué?

3. ¿Cuál es la suma de $\angle APB + \angle PAO + \angle POA$?

4. ¿Cuál es la suma de $\angle AOB + \angle POA$?

5. Justifica: $\angle APB + \angle PAO + \angle POA = \angle AOB + \angle POA$

6. Justifica: $\angle APB + \angle PAO = \angle AOB$

7. Justifica: $2 \cdot \angle APB = \angle AOB$

8. Justifica: $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$

Conjunto de ejercicios: 4.6

1. Explica cómo la relación entre los ángulos inscritos y sus arcos intersecados pueden ser usados para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo debe ser 180º.

2. Un polígono está *inscrito* en un círculo si todos sus ángulos son ángulos inscritos de ese círculo.

(a) Demuestra o refuta: Si un cuadrilátero inscrito en un círculo tiene un ángulo recto, entonces, debe tener por lo menos dos.

(b) Demuestra o refuta: Si un cuadrilátero inscrito en un círculo tiene un ángulo recto, entonces, debe ser un rectángulo.

Recuerda que para demostrar una aseveración general, debes proveer un argumento para mostrar que siempre es cierta. Para refutarlo, sólo necesitas encontrar un contraejemplo, una instancia en la cual es falsa.

3. He aquí otro caso de la aseveración.

> La medida de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central de su arco intersecado.

En este caso, la línea a través del vértice del ángulo inscrito y el centro del círculo cruza el arco intersecado, como en la Figura 4.53. Demuestra que la aseveración es cierta en este caso.

PLAN: Dibuja *PO* y extiéndelo hasta que choque con el círculo en algún punto, digamos *C*. Usa *PC* para romper el ejercicio en dos instancias del caso que demostramos al final de esta sección. Suma los resultados.

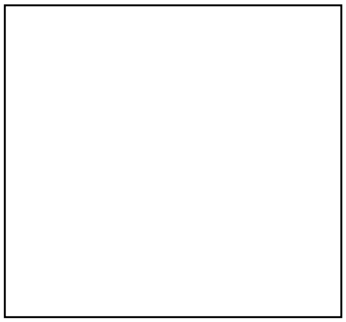

Figura 4.53

4. He aquí el caso restante de la aseveración.

> La medida de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central de su arco intersecado.

En este caso, mostrado en la Figura 4.54, la línea a través del vértice del ángulo inscrito y el centro del círculo no cruza el arco intersecado. Demuestra que la aseveración es cierta en este caso.

PLAN: Dibuja PO y extiéndelo hasta que interseque el círculo en algún punto, digamos C. Usa PC para romper el ejercicio en dos instancias del caso que demostramos al final de esta sección. Resta un resultado del otro.

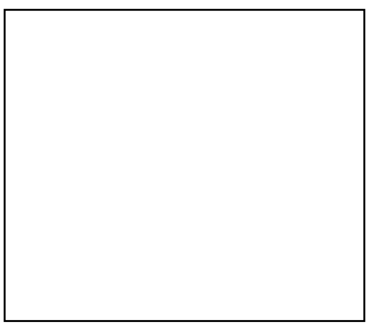

Figura 4.54