4.7 Completando el círculo

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Usar métodos de este capítulo para construir triángulos Reuleaux y otras curvas no circulares con grosor constante

Usar métodos de este capítulo para encontrar perímetros y áreas de triángulos Reuleaux y otras curvas no circulares con grosor constante.

Terminamos este capítulo volviendo la vista atrás a la sección 4.1, a las propiedades de los círculos enumeradas por el profesor Philip Davis. La mayoría de estas propiedades ya han sido exploradas en algún detalle, pero, una de ellas —*grosor constante*— merece un poco más de atención.

Hablando relajadamente, una figura de *grosor constante* es una curva cerrada que tiene el mismo grosor en todos los lados. Esto suena simple, hasta que piensas sobre cómo verificar una curva en particular para esta propiedad. ¿Qué significa “en todos lados”? Con los círculos, es bastante fácil. Esto significa que el diámetro es igual en todos los lados.Pero, ¿qué tal si la curva no es un círculo? ¿Qué rol juega el diámetro? ¿Cómo mides el grosor de un triángulo isósceles o un óvalo o la pista de Go-Karts en la Sección 4.5?

En la Sección 4.1 la idea del grosor constante fue explicada en términos de rodillos. Dijimos que puede haber rodillos los cuales trabajan suavemente pero, no tienen secciones transversales circulares. Visualiza cómo funcionan los rodillos. Observa el dibujo nuevamente, en la Sección 4.1, si necesitas ayuda visualizando esto. Para que un rodillo funcione suavemente, la distancia entre la superficie plana en la cual está rodando y el objeto plano rodando en ella, debe ser siempre la misma.

La Figura 4.55 muestra una vista lateral de algunos rodillos. ¿Cuáles de estos rodillos funcionarán suavemente? ¿Cuáles ocasionarán un recorrido desigual? ¿Sobre cuáles no estás seguro?

Figura 4.55

La Figura 4.55 muestra una buena manera de pensar sobre el grosor de una figura: “Atrapa” la figura entre dos líneas paralelas y mide la distancia entre las líneas. Esa medida puede variar, por supuesto, dependiendo dónde dibujas las líneas paralelas.

Por ejemplo, el rectángulo en la Figura 4.56 tiene muchos grosores diferentes, tres de las cuales están ilustradas.

El grosor entre las líneas l_1 y l_2 es 1 cm.

El grosor entre las líneas m_1 y m_2 es 2 cm.

El grosor entre las líneas n_1 y n_2 es 2.2 cm.

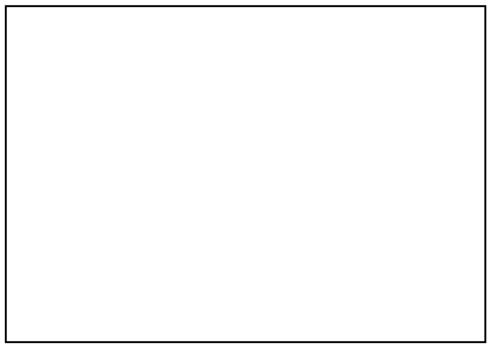

Figura 4.56

1. **¿Cuál es el grosor más pequeño del rectángulo en la Figura 4.56? ¿Cuál es el grosor más grande? Explica.**
2. **¿Cuál es el grosor más pequeño de un cuadrado que tiene 3 cm. en un lado? ¿Cuál es el grosor más grande? Explica.**
3. **¿Cuál es el grosor más pequeño de un círculo con un radio de 4 cm. ¿Cuál es el grosor más grande? Explica.**

Usa una regla para medir, al milímetro más cercano, los grosores mayores y menores de las tres curvas en la Figura 4.57?

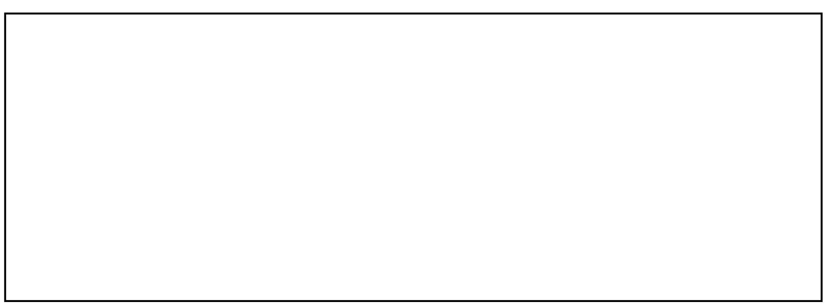

Figura 4.57

Ahora que tienes una buena idea del grosor, el término grosor constante debe tener sentido. Una figura (genralmente llamada una curva) tiene un *grosor constante* si la distancia entre dos líneas paralelas que atrapa (sólo toca, pero, no cruza o aprieta) la figura es siempre igual, no importa cómo la figura esté colocada entre ellas.

Los círculos tienen un grosor constante, por supuesto. La distancia entre cualesquiera dos líneas tangentes paralelas es siempre igual; es el diámetro del círculo.Pero, *muchas* otras curvas tienen esta propiedad. Una de ellas aparece en la Figura 4.57. ¿Notaste que todas las medidas de grosor para (b) resultaron ser iguales? Esa curva es una de las curvas no circulares más simples con grosor constante. Se le conoce como el **triángulo Reuleaux**, nombrado en honor a Franz Reuleaux, el ingeniero alemán que fue el primero en investigar estas formas.

Los triángulos Reuleaux no son en realidad triángulos, pero, estos están íntimamente relacionados con los triángulos equiláteros. Este tipo más simple, mostrado nuevamente en la Figura 4.58, se construye comenzando con un triángulo equilátero (mostrado también) y dibujando tres arcos de 120º de vértice a vértice. Cada arco usa un vértice del triángulo equilátero como su centro y la longitud del lado del triángulo como su radio. De esta manera, todos los puntos de cada arco se encuentran a la misma distancia del vértice opuesto a ese arco, garantizando que esta figura "rodará fácilmente" aunque tenga esquinas.

Un triángulo Reuleaux

Figura 4.58

¿Cómo puedes estar *seguro* que un triángulo Reuleaux es una curva con grosor constante? Es decir, ¿cómo su construcción garantiza que las líneas paralelas que atrapan están siempre a la misma distancia de separación? (*Pista*: Observa nuevamente la propiedad #5 del profesor Davis, la cual aparece en la Sección 4.1).

Construye un pentágono regular que mida 5 cm. en un lado. Usa este pentágono para construir una curva con grosor constante con 5 vértices. Generaliza el método para construir un triángulo Reuleaux. ¿Podrá este método de construcción funcionar con cualquier polígono regular? Explica.

Pensarás que los triángulos Reuleaux y dichas otras cosas son sólo curiosidades conlos cuales algunas personas juegan. No es así. Las curvas con grosor constante han sido usadas en el diseño de muchas cosas, incluyendo el motor rotativo Wankel, un taladro para hoyos redondos, y monedas para las máquinas de ventas. Una fuente para aprender más sobre las curvas con grosor constante es *Mathematics Meets Technology*, de Brian Bolt.[6]

REFLEXIÓN

He aquí algunos datos sobre los círculos que aparecieron en este capítulo.

- Los círculos son las formas más simétricas de todas las formas bidimensionales, y todos los círculos son similares.
- Un círculo puede ser determinado por un punto (su centro) y que no están alineados.
- Los círculos pueden ser graficados en forma paramétrica usando las funciones de seno y coseno.
- Las fórmulas para el área y la circunferencia de cualquier círculo están unidos por una constante, π, lo cual es fundamental para muchas, muchas partes de las matemáticas y la ciencia.
- π es un número irracional; no puede ser representado exactamente por un decimal o una fracción. No obstante, π en sí es un valor exacto —el área comprendida por una unidad de círculo, la proporción de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro, y la proporción del área de cualquier círculo a la raíz cuadrada de su radio.
- Debido a que todos los círculos son iguales, sus arcos pueden ser medidos en términos de sus ángulos centrales y también, por los ángulos inscritos en el círculo.
- Los rodillos no tienen que ser redondos; hay otras curvas con grosor constante.

[6]New York: Cambridge University Press, 1991. En este libro, son llamadas “curvas de grosor constante”.

Esta lista no incluye todo lo que debes saber sobre los círculos, pero te deben recordar las ideas más importantes que has visto. Lo que es más importante, podría sugerir otras preguntas que puedes investigar por tu cuenta con las herramientas que este capítulo te ha provisto.

Conjunto de ejercicios: 4.7

1. **(a)** ¿Es un cuadrado una curva de grosor constante? Explica.
(b) ¿Es un pentágono regular una curva de grosor constante? Explica.
(c) Extiende tus respuestas a las partes (a) y (b) al caso general de cualquier polígono regular.

2. **(a)** Construye un triángulo Reuleaux a partir de un triángulo equilátero con 3 pulgadas en un lado.
(b) ¿Cuál es el perímetro de este triángulo Reuleaux?
(c) ¿Cuál es el área de este triángulo Reuleaux?
(d) ¿Cuál es el perímetro de un triángulo Reuleaux construido a partir de un triángulo equilátero con una longitud de lado s?
(e) ¿Cuál es el área de un triángulo Reuleaux construido a partir de un triángulo equilátero con una longitud de lado s?

3. Sigue estas instrucciones para dibujar otra curva no circular de grosor constante:

∞ Construye un triángulo equilátero con un lado de 6 cm.

∞ Extiende cada lado 3 cm. más allá de su vértice.

∞ Usando un vértice como centro, dibuja estos dos arcos:

− un arco con radio de 3 cm. conectando los extremos más cercanos de los dos lados que se cruzan en el vértice, y

− un arco con radio de 9 cm. conectando los extremos más lejanos de los dos lados que se cruzan en el vértice.

∞ Repite el paso anterior en los otros dos vértices.

La figura resultante se debe parecer a la de la Figura 4.59.

Otra curva de grosor constante

Figura 4.59

(a) ¿Cuál es el grosor de la figura que acabas de dibujar?

(b) Dibuja una curva del mismo grosor constante, comenzando con un triángulo equilátero de 3 cm. en un lado.

(c) Dibuja una curva del mismo grosor constante, comenzando con un triángulo equilátero de 9 cm. en un lado.

(d) Describe el patrón general de tus resultados de cualquier manera que puedas.

(e) ¿Cómo se ajusta un círculo a este patrón? ¿Cuál círculo? ¿Cuál es su diámetro o radio?

(f) ¿Cómo un triángulo Realeaux como ha sido descrito en esta sección se ajusta a este patrón? ¿Cuál? Dibújalo.

(g) Encuentra el perímetro de cada una de estas figuras, incluyendo el círculo y el triángulo Reuleaux.

4. Escribe un argumento cuidadoso y lógico para demostrar que la figura construida en el problema 3 es una curva de grosor constante.

PHOTO