

# Las funciones trigonométricas

## Capítulo 3

### 3.1 Eventos cíclicos en el mundo natural

#### Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Reconocer la gráfica de una función periódica

Declarar el período de una función periódica

Dar ejemplos de cosas que se comportan de una manera periódica en el mundo natural.

Una canción popular de los años sesenta, llamada “Turn! Turn! Turn!” contiene las siguientes letras:

Para todas las cosas (gira, gira, gira)

Hay una estación (gira, gira, gira)

Y un momento para cada propósito bajo el cielo.

Un tiempo para nacer, un tiempo para morir

Un tiempo para sembrar, un tiempo para cosechar...<sup>1</sup>

Esta canción habla sobre el ciclo eterno de la naturaleza y las estaciones. Muchas cosas en el mundo natural ocurren de acuerdo a cierto patrón cíclico, que se repite. Tú consideraste brevemente algunos eventos cíclicos tales como las mareas y la salida y puesta del sol, cuando estudiaste anteriormente trigonometría en **MATH Connections**. Este capítulo ampliará y aumentará tu comprensión de este tipo de función.

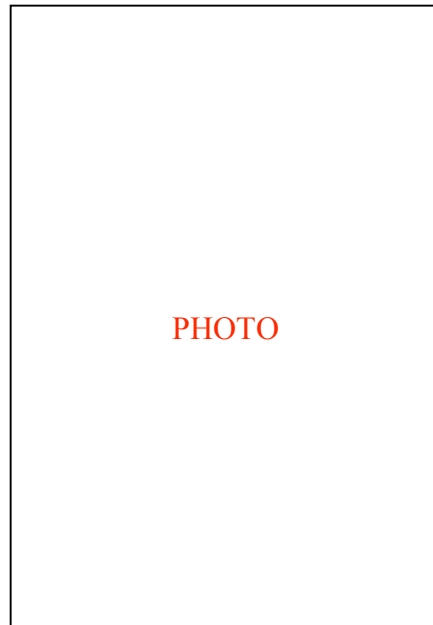
<sup>1</sup>De Turn! Turn! Turn! (To Everything There Is A Season) adaptada del Libro de Eclesiastés y música de Pete Seeger. TRO © Derechos Reservados 1962 (renovado) Melody Trails, Inc., New York, NY. Reproducido con permiso.

**Escribe cuatro cosas del mundo a tu alrededor que piensas ocurren en un ciclo regular repetitivo. Compara éstas con las de tus compañeros de clase.**

La variación de las estaciones es una situación común para tomar en consideración porque ocurre todos los años. El tiempo cambiante en las estaciones es causado en parte por el cambio en la cantidad de luz solar que recibimos mientras el año transcurre. Por lo menos, en el Hemisferio Norte, los días se hacen más largos en el verano y se acortan en el invierno. La navegación depende de la comprensión de esto y otros fenómenos celestes, así que es útil si podemos hacer modelos matemáticos de estos procesos naturales.

Si conocemos la diferencia en tiempo entre la salida y la puesta del sol en una latitud y longitud específica, podemos determinar la duración del día para esa localización. Los valores para la ciudad de Nueva York están dados en la Figura 3.1, para cada catorce días, continuando por un año. El 21 de marzo es designado como Día 0. Los días anteriores al 21 de marzo tienen un valor negativo, por ejemplo, el 20 de marzo está denotado como  $-1$ , el 19 de marzo como  $-2$ , y así sucesivamente.

**¿Por qué tú piensas que el 21 de marzo fue escogido para ser el Día 0 en vez de alguna otra fecha, por ejemplo, el 1 de enero, el comienzo del año?**



Utiliza estos datos para dibujar una gráfica de las horas de luz durante el día ( $y$ ) versus el día del año ( $x$ ).



Horas de luz durante el día en la ciudad de Nueva York por día del año		
Fecha	Día (número)	Horas de luz durante el día
11 de enero		
25 de enero		
8 de febrero		
22 de febrero		
7 de marzo		
21 de marzo		
4 de abril		
18 de abril		
2 de mayo		
16 de mayo		
30 de mayo		
13 de junio		
27 de junio		
11 de julio		
25 de julio		
8 de agosto		
22 de agosto		
5 de septiembre		
19 de septiembre		
3 de octubre		
17 de octubre		
31 de octubre		
14 de noviembre		
28 de noviembre		
12 de diciembre		
26 de diciembre		

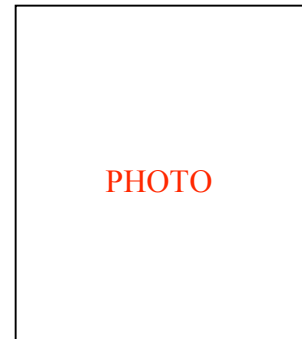


Figura 3.1

Sin embargo, el patrón de estos puntos no es completamente obvio. Se necesitan unos pocos más puntos para ver realmente lo que ocurre. Debido a que la duración de cualquier día particular es muy parecida de año en año podemos encontrar la duración de los días para el año anterior, si simplemente restamos la cantidad de 365 al valor  $x$  en la tabla y entonces, trazamos los puntos resultantes. Por ejemplo, el punto  $(-70, 9.49)$  nos dice la cantidad de horas de luz durante el día para el 11 de enero del año en curso y  $(-70 - 365, 9.49) = (-435, 9.49)$  representaría la cantidad de horas de luz el 11 de enero del año anterior.

Igualmente,  $(-70 + 365, 9.49) = (295, 9.49)$  nos provee la cantidad de horas de luz en enero 11 del año próximo al actual. Si calculamos todos los puntos para el año anterior al actual, y para el año próximo al actual, y los combinamos con estos en la Figura 3.1, el resultado sería una gráfica igual a la de la Figura 3.2.

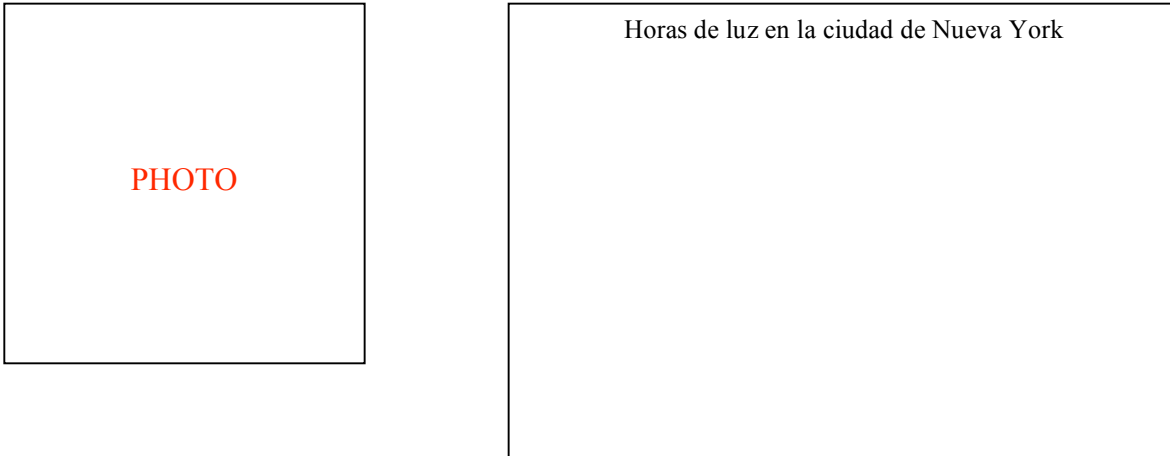


Figura 3.2

Los puntos sólidos representan los datos de la tabla original; los puntos huecos son los valores adicionales que han sido añadidos para el año anterior y el próximo año.



1. **Calcula el número de día para el 21 de diciembre y encuétralo en la gráfica –recuerda comenzar con el 21 de marzo como 0. ¿Cómo la duración de este día compara con otros días durante el año? ¿Qué nombre se le da a esta fecha?**
2. **Encuentra otro día este año con la misma cantidad de horas de luz que el 21 de marzo. ¿Qué fecha sería esta? ¿Qué es cierto acerca del valor y para esta fecha? ¿Qué nombre se le da a estas fechas?**
3. **Encuentra el día más largo del año en la ciudad de Nueva York de acuerdo a la gráfica. ¿Qué fecha sería? ¿Qué nombre se le da a esta fecha?**

El patrón de estos datos es claro y parece variar de una manera regular. Debido a esto, puede ser posible encontrar una función matemática que puede modelar estos datos para nosotros. Si podemos encontrar una función que varía de una manera regular y se repite a sí misma en el mismo patrón una y otra vez, se le conoce como una *función periódica*.

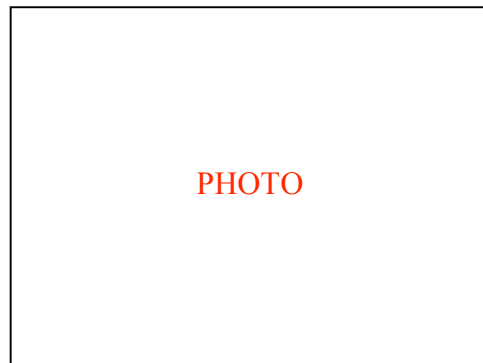
**Frase a conocer:** El **período** de una **función periódica** es el valor positivo más pequeño que debe ser añadido a  $x$  (o restado de  $x$ ) para repetir la función.

**Dato a conocer:** Simbólicamente, si  $a$  es el período para  $f(x)$  entonces,  $f(x) = f(x \pm a) = f(x \pm 2a) = f(x \pm 3a)$ .

1. **Escoge cualquier punto en la gráfica de la Figura 3.2 y encuentra otro punto que tenga el mismo valor  $y$ . Encuentra el valor  $x$  de cada punto y réstalos. Llama a este valor  $a$ .**
2. **Escoge un punto diferente  $(x, y)$  y escribe sus coordenadas. Encuentra el punto con la coordenada  $x, x + a$  y encuentra su coordenada  $y$ . ¿Es ésta igual a la coordenada  $y$  del punto original?**
3. **Si tu contestación es sí, entonces, ¿cuál es el período de esta función? Si tu respuesta es no, ¿por qué  $a$  no es el período de la función?**



En este caso el período es aproximadamente 365 porque el patrón se repite cada 365 días (ignorando los años bisiestos).



## EXPLORACIÓN

Hay otras actividades que pueden producir gráficas matemáticas interesantes. Tu profesor te dará un diagrama de la cara de un reloj que muestra solamente la manecilla que marca la hora. Pégala en cualquier lugar de tu escritorio, pero asegúrate que los bordes del papel estén alineados con los bordes de tu escritorio.

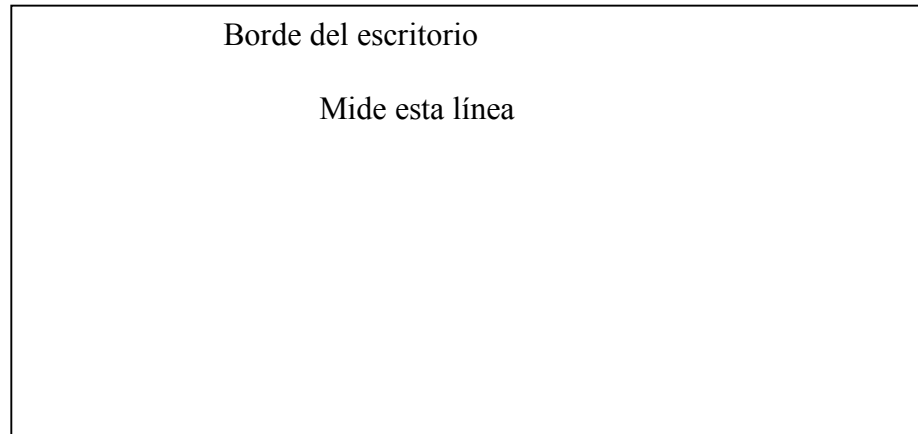


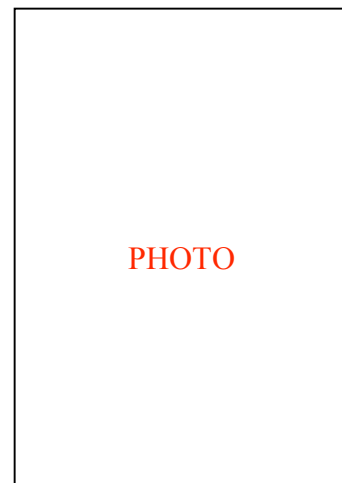
Figura 3.3

1. Mide la distancia (en cm.) de la punta de la manecilla que marca la hora al borde superior de tu escritorio para cada hora, comenzando a la 1 en punto y terminando a las 12 en punto. Por ejemplo, a las 2 en punto tú harías la medida mostrada en la Figura 3.3.
2. Anota tus datos en una tabla como la siguiente.

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Distancia												

3. Dibuja una gráfica de la hora (eje de  $x$ ) versus la distancia (eje de  $y$ ).
4. Explica por qué este conjunto de puntos forma una función.
5. ¿Es periódica la función? Si es así, ¿cuál es el período? Si no es así, explica por qué no.

6. Asume que en nuestro experimento, la 1 en punto representa 1 a.m. y que las 12 en punto es el mediodía. Si nombramos la 1 p.m. como las 13:00 horas, y continuamos haciendo medidas hasta las 24:00 horas, explica por qué podrías llenar otra gráfica sin hacer ningunas otras medidas adicionales.
7. Haz otra gráfica de 13:00 a 24:00 horas y añádele estos puntos a la gráfica. ¿Qué notas?
8. Si imaginas que una línea del centro del reloj mirando hacia las 12 es el punto de partida, entonces, podemos pensar en el tiempo como ángulos formados por este rayo del comienzo y la manecilla de la hora del reloj. Por ejemplo, las 2 a.m. es  $60^\circ$ , las 5 a.m. es  $150^\circ$ , 8 a.m. es  $240^\circ$  y así sucesivamente. Si tú piensas en 24:00 (medianoche) como un ángulo de  $0^\circ$ , entonces, ¿cuál ángulo asociarías con cada una de las siguientes?  
 (a) 1 a.m.    (b) 7 a.m.    (c) 11 a.m.    (d) 3 p.m.
9. Usa esta idea para rotular nuevamente cada una de las horas en el eje  $x$  con su ángulo correspondiente y dibuja la gráfica de nuevo. Cuando haces esto, ¿cambia la gráfica de alguna otra manera? Explica.
10. ¿Hay alguna razón por la cuál no pudieras llevar a cabo este experimento, para incluir las distancias para la manecilla de la hora a la 1:30, 2:30, y así sucesivamente? Explica.
11. ¿En cuáles maneras es esta última gráfica igual o diferente de la gráfica que dibujaste para la cantidad de horas de luz?



La actividad en esta **Exploración** produjo un conjunto de puntos que parecen formar una curva igual a la que fue producida al hacer la gráfica de la cantidad de horas de luz. En el Capítulo 1 observamos cómo los datos pueden ser modelados por medio de ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Pero, ¿qué tipo de ecuación matemática proveerá los tipos de curvas que nos han mostrado aquí ambos tipos de conjuntos de datos? Ambos tienen algo que ver con el tiempo, y el ejemplo del reloj puede ser relacionado a los ángulos, incluyendo los ángulos que son mayores de  $360^\circ$ . Las funciones periódicas son relacionadas a menudo a los ángulos y se necesita dar una mirada más detallada a los ángulos antes de continuar con la próxima sección.

PHOTO

### Conjunto de ejercicios: 3.1

1. En el año 1900, Willem Einthoven inventó el electrocardiograma (EKG, por sus siglas en inglés). Esta máquina mide los impulsos eléctricos que causa los latidos del corazón. Los médicos usan este registro para ayudarlos en el diagnóstico de los problemas del corazón; y muchos programas médicos de la televisión tienen pantallas de vídeo que muestran las gráficas clásicas de las pulsaciones del corazón. A Einthoven se le otorgó el premio Nobel en el año 1924 por su invención.

La Figura 3.4 muestra un trazado típico de un EKG para un adulto saludable.

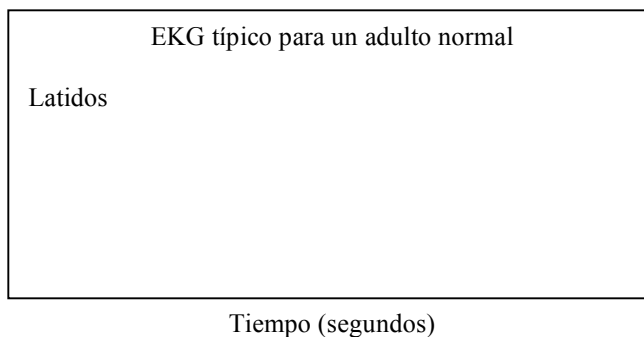


Figura 3.4

- Basado en la porción de la gráfica que puedes ver, ¿podrías decir que ésta es una función periódica? Explica.
- Asume que la gráfica ilustrada es representada por  $y = f(x)$ . ¿Es  $f(0.5) = f(2)$ ? Explica.
- Encuentra dos valores para  $a$  que hagan de  $f(a) = f(3)$  una declaración cierta.
- ¿Cuántos ciclos completos ocurren entre  $t = 0.5$  y  $t = 3.5$  segundos?
- ¿Cuál es el período de esta gráfica?
- Basado en tu contestación para (e), ¿cuál tú dirías es el ritmo del corazón en latidos por minuto para esta persona? ¿Es esto normal?
- Si el ritmo cardíaco era de 120 latidos por minuto, ¿cuál sería el período del trazado EKG en minutos? ¿Cuál sería en segundos?
- Los animales, tales como los gatos y los perros tienen ritmos cardíacos muy diferentes al de los humanos. El ritmo cardíaco para los elefantes es 46 latidos por minuto. ¿Cuál sería el período del trazado del EKG correspondiente?

- (i) El corazón de un canario palpita 1000 latidos por minuto. ¿Cuál sería el período del trazado del EKG correspondiente (¿si un canario estuviera quieto durante este procedimiento!)?

2. Algunos analistas del mercado de valores creen que los precios de las acciones varían en un patrón predecible, y, si estos patrones se pudieran establecer, facilitaría las decisiones que se tomen sobre la compra y venta de acciones. La Figura 3.5 muestra el precio semanal promedio de las acciones para Acme Manufacturing Company por un período de 5 años.

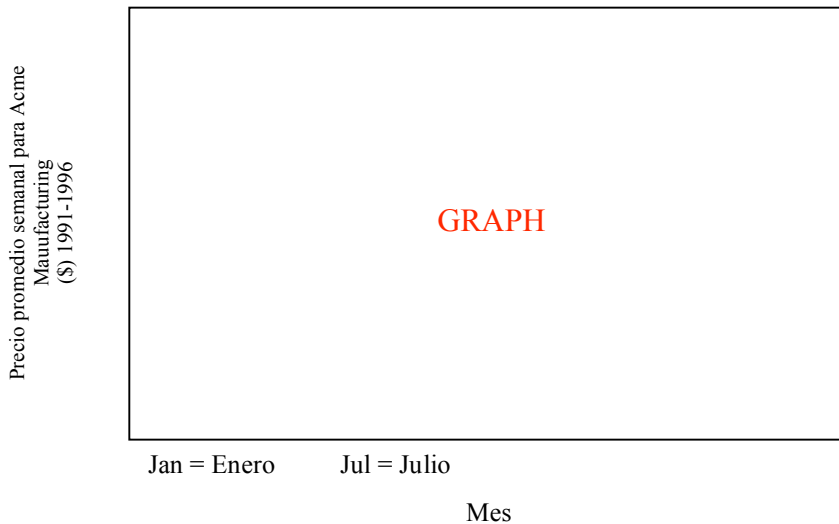


Figura 3.5

- (a) Explica por qué este conjunto de puntos forma una función.
- (b) ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos para esta función?
- (c) ¿Cuándo estuvo el mercado de valores en su valor más alto en los últimos 5 años?
- (d) ¿Cuándo estuvo el mercado de valores en su valor más bajo en los últimos 5 años?
- (e) Basado en la porción de la gráfica que puedes ver, ¿dirías que ésta es una función periódica? Explica.
- (f) ¿Cuál es el significado de la palabra cíclico? ¿Dirías que estos precios de estas acciones son cíclicos? Explica.

3. En el Capítulo 1 estudiaste las funciones polinómicas de la forma  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , y examinaste sus características. Fija la función WINDOW de tu calculadora gráfica de manera que  $-6 < x < 6$  y  $-2 < y < 2$  y haz una gráfica de la función polinómica definida por

$$f(x) = x - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}$$

Recuerda que  $3!$  se lee como un “factor de tres”, y que  $3!$  quiere decir 3 H 2 H 1. La TI-84 Plus (TI 83 Plus) tiene una tecla de menú para la función factorial. Presiona la tecla MATH y desplaza el cursor a través de PRB y oprime el 4.

- (a) Explica por qué ésta es una gráfica de una función.
- (b) Basado en lo que puedes ver, ¿dirías que ésta es una gráfica de una función periódica? Explica.
- (c) Cambia WINDOW de manera que  $-8 < x < 8$  y  $-2 < y < 2$ . ¿Cambiarías tu contestación a la parte (b)? Explica.