3.2 Calculando todos los ángulos

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás

Dibujar e identificar ángulos de rotación positiva, negativa y coterminal

Calcular ángulos de rotación equivalentes en ambos, grados y medida de radián

Identificar ángulos de rotación comunes en grados y en medida de radián

Convertir los radianes a grados y grados a radianes.

Terminal Ray = Rayo terminal

Inicial Ray = Rayo inicial

Figura 3.6

Los ángulos se forman cuando dos rayos se intersecan (ver Figura 3.6). El punto donde se intersecan es el *vértice* del ángulo. Otra forma de pensar en los ángulos es imaginando dos rayos que están sujetados en un extremo por un pin. Un rayo se mantiene fijo como una referencia (el *rayo inicial*), y el otro (el *rayo terminal*) se rota para formar un ángulo. Los ángulos que se forman de esta manera se les conocen como los *ángulos de rotación*.

Una de las diferencias más importantes entre los ángulos como los has visto antes, y los ángulos de rotación, es que los ángulos de rotación no están usualmente puestos en cualquier lugar. Recuerda que los puntos en el plano de coordenadas son definidos en relación a un punto de referencia fijo llamado el origen. Los ángulos de rotación son definidos también con el vértice situado en el origen. El eje de x positivo es usado para el rayo inicial. Los ángulos que se forman por una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj son positivos. Los ángulos que se forman en una rotación en el sentido de las agujas del reloj son negativos (véase la Figura 3.7). Este enfoque hace posible el incluir ángulos en el sistema de coordenadas cartesiano.

GRAPH

Figura 3.7

Es interesante notar que con los ángulos de rotación no es sólo posible obtener ángulos que son negativos, pero, también se obtienen ángulos que son mayores de 360º. Verás algunos ejemplos en la Figura 3.8.

Terminal Ray = Rayo terminal

Figura 3.8

El que es un poco inusual es el ángulo en (d) que está marcado 400º, porque, usualmente pensamos en los ángulos como estando entre 0 y 360º. Como puedes ver, el rayo terminal del ángulo (la posición final del brazo en rotación) ha dado una vuelta completa una vez y está ahora en la segunda vuelta. Observa nuevamente los ángulos en (d) y (e). Se dice que los ángulos de 40º y 400º son coterminales, porque tienen el mismo rayo terminal –ellos tienen justamente la misma posición un poco diferente. De igual manera, en (f) el ángulo de −90º es coterminal con el ángulo de 270º, porque tienen el mismo rayo terminal.

Frase a conocer: Los **ángulos coterminales** son ángulos que tienen el mismo rayo inicial y el mismo rayo terminal.

Los ángulos en (a), (b), (c) y (e) de la Figura 3.8 son coterminales con cuatro ángulos de la Figura 3.9.

1. Observa los ángulos en los dos diagramas y decide cuáles tienen el mismo rayo terminal (esto es, uno que al ser colocado sobre el otro, sus rayos terminales coincidan). Escribe los pares de letras de los dos diagramas que tienen ángulos coterminales.

2. Usa este apareamiento para encontrar el grado de medida de cada ángulo que es indicado en la Figura 3.9.

GRAPH

Figura 3.9

Dato a conocer: Los ángulos coterminales se pueden encontrar sumando o restando cualquier número entero múltiple de 360º al ángulo original. En otras palabras, cualquier ángulo θ es coterminal con $\theta \pm 360k$, donde k es un número entero.

1. **Para cada par de ángulos, indica si el par es coterminal o no. Explica.**
   (a) 30º, 390º (b) 45º, 765º (c) 30º, 330º
   (d) 60º, −300º (e) −120º, 220º
2. **Para cada uno de los siguientes ángulos provee un ángulo coterminal positivo y uno negativo.**
   (a) 270º (b) 44º (c) 125º (d) 45º
   (e) 135º (f) 200º (g) 300º (h) 400º
3. **Para cada uno de los siguientes ángulos provee un ángulo coterminal positivo.**
   (a) −45º (b) −60º (c) −160º (d) −300º
4. **Para cada uno de los siguientes ángulos provee un ángulo coterminal negativo.**
   (a) 45º (b) 75º (c) 100º (d) 250º

Los grados son una manera práctica para medir ángulos. Sin embargo, el plano de coordenadas, nos permite describir formas geométricas en términos de longitud y distancia. Los matemáticos han desarrollado otra manera para medir los ángulos –un sistema basado en la longitud de los arcos.

Obaserva el diagrama en la Figura 3.10. Se muestran cuatro ángulos de rotación, cada uno comenzando en el eje *x* positivo. Estos son, en ningún orden particular

π*POB*, π*POD*, π*POA*, π*POC*

1. **Enumera las medidas de los cuatro ángulos desde el más pequeño al más grande.**
2. **¿Cuál de los arcos del círculo denotado por *PA*, *PB*, *PC*, y *PD* es el más grande?**
3. **¿Cuál arco es el más pequeño?**
4. **¿Cuál ángulo es asociado con el arco más pequeño? ¿Es éste el ángulo más pequeño? Explica.**
5. **¿Cuál ángulo es asociado con el arco más grande? ¿Es éste el ángulo mayor? Explica.**

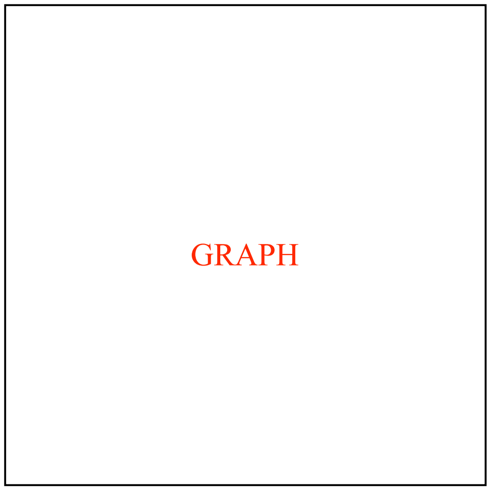
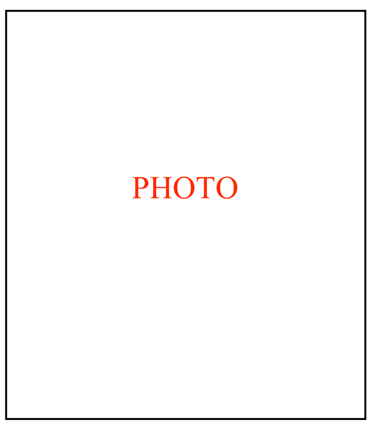


Figura 3.10

En un círculo, el tamaño de un ángulo es relacionado a la longitud del arco que éste intercepta. Por ejemplo, π*POB* es el segundo ángulo más pequeño, y está asociado con el segundo arco más corto, *PB*. π*POD* es el ángulo más grande, y está asociado con el arco más largo, *PD*. Ahora tenemos una manera de medir ángulos que está basada en una unidad de longitud, porque cada ángulo tiene un arco con alguna longitud asociada con él. Esta manera de medir ángulos se le conoce como *medida radián*.

Frase a conocer: Una **medida radián** es el promedio de la longitud del arco al radio de un círculo.



Para relacionar la longitud de un arco a la medida de grado de un ángulo, usemos un ángulo de 180º (véase Figura 3.11).

PHOTO

1 unit = 1 unidad

GRAPH

Figura 3.11

En este caso, el ángulo, πAOB = 180º, y el arco, *AB*, es la mitad de la circunferencia de un círculo con un radio de 1 unidad. De manera que podemos decir que 180º = $\frac{2\pi \cdot 1}{2} = \pi$ radianes.

Tu calculadora te permite escoger grados o radianes para los ángulos. Ten cuidado al resolver un problema, verifica si hay alguna instrucción especial sobre cuál método debes utilizar.

Dato a conocer: π (*radianes*) = 180º.

Algunas veces cuando está claro que los ángulos se miden en radianes (por ejemplo, cuando los ángulos están dados como fracciones de π), se omite la palabra *radián*. Como cualquier sistema nuevo, la medida radián tomará un poco de tiempo para acostumbrarse a su uso, pero, es más fácil si piensas en ello en términos de las rotaciones y fracciones o múltiplos de π. Por ejemplo, una rotación de 2π (radianes) es igual a 360º, mientras que una rotación de $\frac{\pi}{2}$ (radianes) es igual a 90º. En este libro todos los ángulos se asume que estén dados en radianes a menos que esté definido que estén dados en grados.

1. Si π (radianes) = 180º, entonces

$$1 \text{ (radián)} = \frac{180\infty}{\pi} = \frac{180\propto}{3.14} = 57.3^{\circ}$$

2. Si π (radianes) = 180º, entonces

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ (radianes)} = 0.0175 \text{ (radianes)}$$

La Figura 3.12 ilustra que un radián está alrededor de 57º.

unit = unidad

approx. = aproximadamente

Figura 3.12

Usa estas ideas para contestar las siguientes preguntas:

1. Provee la medida del ángulo en ambos, grados y radianes (como una fracción o múltiplo de π) para cada una de las siguientes.

Rotación	Grados	Radianes
Una rotación en el sentido de las agujas del reloj		
Media rotación en sentido contrario a las agujas del reloj		
Tres rotaciones en el sentido de las agujas del reloj		
Un cuarto de rotación en el sentido de las agujas del reloj		
Un tercio de rotación en el sentido de las agujas del reloj		
Una rotación y media en sentido contrario a las agujas del reloj		

2. Usa tu calculadora para establecer la medida radián en forma decimal para cada una de las rotaciones. Por ejemplo, en vez de $\frac{\pi}{4}$, escribirías 0.79.

3. Convierte cada una de las siguientes medidas radianes a medidas de grados.

(a) $\frac{\pi}{5}$ **(b)** $\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\frac{-\pi}{8}$ **(d)** $\frac{8\pi}{5}$

4. Convierte cada una de las siguientes a medida radián, primero, como una expresión que contenga π y luego como un resultado decimal.

(a) 45º (b) 60º (c) −100º
(d) 270º (e) 450º (f) 240º

La idea de ángulos coterminales que consideramos anteriormente, también se aplica a los ángulos en medida radián, excepto, que sumemos o restemos múltiplos de rotaciones en radianes. De manera, que por ejemplo, un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ es coterminal con un ángulo de $\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$ y un ángulo de $-\frac{\pi}{3}$ es coterminal con un ángulo de $-\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{\pi}{3}-\frac{6\pi}{3}=-\frac{7\pi}{3}$.

También podemos verificar evaluando todo en la calculadora en vez de usar fracciones o múltiplos de π. Por ejemplo, evalúa la expresión $-\frac{\pi}{3}$ en tu calculadora y obtendrás −1.047 aproximadamente. Si evalúas la expresión $-\frac{7\pi}{3}$ obtendrás −7.33 aproximadamente. La diferencia entre estos dos valores es −1.047 − (−7.33) = 6.283, lo cual es casi 2π.

1. **Verifica que $\frac{\pi}{2}$ es coterminal con $\frac{5\pi}{2}$, sin usar tu calculadora.**
2. **Verifica que $\frac{\pi}{2}$ es coterminal con $\frac{5\pi}{2}$, usando tu calculadora.**

Aunque siempre podemos convertir todo de nuevo a medidas de grados, y convertirlas de nuevo a medidas radianes, esto no es eficiente. En general, si un ángulo está dado en radianes, es mejor encontrar los ángulos coterminales en radianes.

Dato a conocer: Los ángulos coterminales de ángulos medidos en radianes se pueden encontrar sumando o restando cualquier número entero múltiplo de 2π a la medida original del ángulo. En otras palabras, cualquier ángulo θ (en radianes) es coterminal con $\theta \pm 2\pi k$, donde k es un número entero.

1. **Provee un ángulo coterminal positivo y uno negativo para cada una de las siguientes. Tus contestaciones deben estar en medida radián.**

   (a) $\frac{\partial}{3}$ **(b)** $\frac{\pi}{5}$ **(c)** $\frac{2\pi}{3}$

   (d) $\frac{-3\pi}{4}$ **(e)** **0.25** **(f)** **−0.25**
2. **Verifica tus contestaciones a las partes (a), (b), y (c) usando tu calculadora.**

EXPLORACIÓN

Un sector de un círculo en forma de pastel tiene un radio r, un sector de un ángulo (θ), y una longitud de arco s.

PHOTO

(a) Encuentra la proporción del área de un sector al área del círculo en términos de π y la longitud del arco (s).

(b) Usa este resultado para establecer una fórmula para el área de un sector en forma de pastel en términos de un ángulo de un sector (θ) medido en radianes.

(c) Usa esta fórmula para calcular el área de un sector con un ángulo de sector de 60º y un radio de 10 cm.

(d) Verifica tu contestación a la parte (c) sin usar la fórmula que acabas de desarrollar.

Conjunto de ejercicios: 3.2

1. **(a)** Haz una gráfica similar a la siguiente, y complétala.

Ángulo (θ)					
Longitudes del arco (s)					
Radio (r)					
$\dfrac{\text{Longitud de arco}}{\text{Radio}}$					

(b) Establece una ecuación que relacione el ángulo (θ), la longitud del arco (s), y el radio (r).

2. **(a)** Convierte cada uno de los siguientes ángulos a medida radián en forma decimal:

(i) 50º **(ii)** 120º **(iii)** −230º **(iv)** −405º **(v)** 100º

(b) Expresa **(ii)** y **(iv)** en medida radián como una fracción de π.

3. Provee un ángulo coterminal positivo y negativo para cada una de las siguientes. Si el ángulo original está dado en radianes, provee la contestación en radianes. Si el ángulo original está dado en grados, provee las contestaciones en grados.

(a) $\dfrac{\pi}{9}$ **(b)** 67º **(c)** $\dfrac{2\pi}{7}$ **(d)** −310º

4. Convierte cada una de las siguientes a grados y redondea las contestaciones al grado más cercano

(a) $\dfrac{3\pi}{5}$ **(b)** 1.5 **(c)** −0.75 **(d)** $\dfrac{9\pi}{8}$