3.3 Generando funciones circulares

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás

Reconocer la gráfica de las funciones de seno, coseno y tangente

Declarar como apropiadas las máximas, mínimas y el período para el seno, coseno y la tangente

Generar la gráfica de cada función de los movimientos circulares

Generar la gráfica de cada función con la calculadora gráfica

Establecer pares ordenados para cada función usando la calculadora gráfica, sus gráficas o la unidad de círculo.

En la Sección 3.1, examinamos dos situaciones diferentes (la longitud del día y la distancia entre la aguja de la hora del reloj y el borde del escritorio) que varía de una manera periódica. Como vimos en el Capítulo 1, es posible, a menudo, establecer funciones matemáticas que recrean situaciones de la vida real. Más tarde, trataremos de desarrollar una fórmula para la cantidad de horas de luz diaria para un día dado en la ciudad de Nueva York. Por el momento, consideremos cómo las curvas que aparentan ser periódicas pueden ocurrir de otras maneras.

Anteriormente en tus estudios, fuiste introducido a la idea de la máquina de función. Este es un "artefacto" práctico que los matemáticos han desarrollado para ayudar a visualizar de dónde vienen estas funciones. Recuerda que las funciones no son más que conjuntos de pares ordenados con la propiedad de que no puede haber dos pares ordenados que tengan el mismo valor de x y valor de y diferentes. Estos pares ordenados pueden ser enumerados o pueden ser definidos por procedimientos que generan, entonces, la lista de pares ordenados que se necesitan para dibujar la gráfica.

INPUT = ENTRADA	INSTRUCCIONES DE PROCESAMIENTO Dibuja una línea desde O para hacer un ángulo con el eje de x igual al valor de entrada. La salida es la coordenada de y del punto donde ésta línea interseca el círculo.	OUTPUT = SALIDA

Figura 3.13

La máquina de función requiere un valor (la entrada) en la cual lleva a cabo un procedimiento, y entonces, produce un producto (la salida) que corresponde a una entrada dada para esa regla de la función. Por ejemplo, considera la máquina de función en la Figura 3.13. Esta máquina de función es utilizada en conjunto con el diagrama de la Figura 3.14.

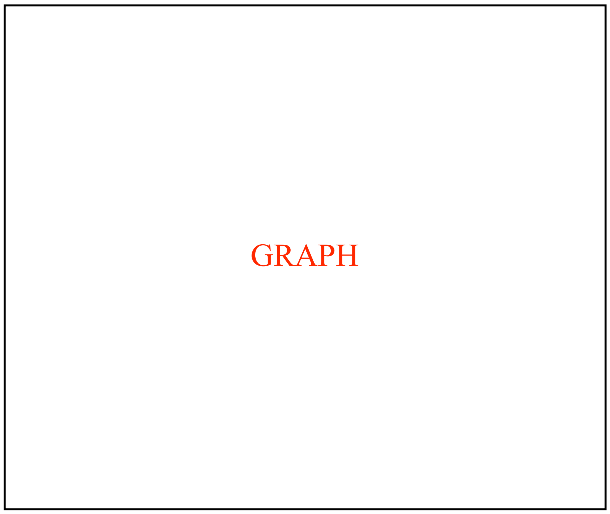

Figura 3.14

En este diagrama el radio del círculo es exactamente una unidad, de manera que se le conoce a menudo como una **unidad de círculo**. Las líneas de puntos están separadas 0.1 unidades y sólo están dibujadas para ayudarte en el estimado de las coordenadas de y. Por ejemplo, si dibujas un ángulo de 45º como es mostrado, el valor de salida sería aproximadamente 0.7. Esto significa que el par ordenado para la función sería (45º, 0.7). Si dibujas un ángulo de 315º, el valor de salida sería −0.7 y así el par ordenado sería (315º, −0.7).

Utiliza tu copia de la unidad de círculo y la máquina de función junto con su regla definida para generar una tabla de valores para esta función para los ángulos de −60º, −30º, 0º, 30º, 60º, ..., 360º, 390º y 420º. Haz una tabla similar a ésta para ayudarte a organizar tu trabajo.

Ángulo	−60º	−30º	0º	. . .	30º	60º	360º	390º	420º
Valor de la función				. . .					

1. **¿Habrá un ángulo correspondiente para cada punto en la unidad de círculo?**
2. **¿Habrá un punto correspondiente en la unidad de círculo para cada ángulo?**
3. **Traza estos pares ordenados en una gráfica. Comenta sobre lo que observes.**

Tu gráfica debe parecerse algo a la mostrada en la Figura 3.15

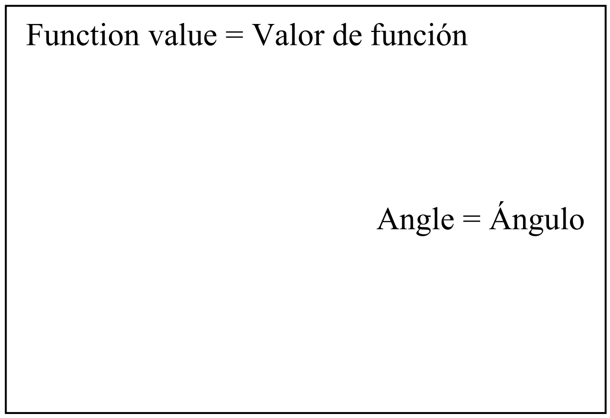

Figura 3.15

Imagina que haz dibujado la gráfica trazando puntos cada 3º en vez de cada 30º. Los puntos comienzan ahora a formar una curva suave como la curva mostrada en la Figura 3.16.

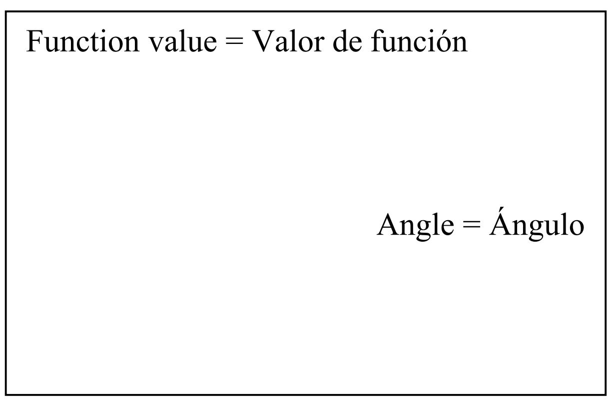

Figura 3.16

1. **Explica por qué los pares ordenados en la gráfica forman una función.**
2. **Explica por qué la función parece ser periódica.**
3. **¿Cuál es el período de esta función?**
4. **¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de esta función?**
5. **¿Para cuáles valores del ángulo, parece ser 0 el valor de la función?**

Frase a conocer: Las funciones que pueden ser generadas de una unidad de círculo se les conoce a menudo como **funciones circulares**.

La semejanza con la curva generada por los datos sobre las horas de luz al día en la ciudad de Nueva York no es una coincidencia. El movimiento circular aproximado de la Tierra alrededor del Sol es un hecho que conecta estas dos funciones circulares. La función circular que hemos generado aquí se conoce como la *función del seno*.

Un término nuevo que es útil para ayudar a describir estos tipos de funciones es la palabra *amplitud*. No todas las funciones periódicas tienen valores máximos o mínimos. Para aquellas que las tienen, podemos definir la **amplitud** como siendo la mitad de la diferencia entre los valores máximos y mínimos de y. De manera que en este caso la amplitud sería

$$\frac{1}{2}(1-(-1)) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

PHOTO

Términos
La palabra *amplitud* es similar a la palabra *amplificar*, que quiere decir más ruidoso. El sonido se produce por la vibración de objetos, tales como un altavoz, una cuerda de guitarra o un afinador. Mientras más grande el alcance de la vibración, más alto es el sonido. En las matemáticas, la palabra tiene un significado similar, porque ésta mide cuán separados están los valores máximos y mínimos.

Dato a conocer: Cuando existe la *amplitud* de una función circular, ésta está dada por

$$\text{Amplitud} = \frac{1}{2}\ [(\text{valor máximo de } y - \text{valor mínimo de } y)]$$

Recuerda que al especificar una función debemos especificar el dominio (los valores posibles de x) y el alcance (los valores posibles de y). El dominio de la función y = seno x es el conjunto de s de manera tal que $-\infty < x < \infty$ mientras que el rango es el conjunto de y de tal manera que $<1 \leq y \leq 1$.

El valor de la función del seno para cualquier ángulo se puede encontrar ya sea usando la unidad de círculo o usando la tecla SIN en la calculadora. Recuerda verificar si la calculadora está fijada para grados o radianes antes de entrar cualesquiera ángulos.

1. **Verifica cada uno de los valores que obtuviste de la unidad de círculo en contra de los valores de la calculadora. ¿Cuán cercanos están?**
2. **Fija la computadora para la función de Degree (grados) y ajusta WINDOW para $-30 \le x \le 420$ y $-1.5 \le y \le 1.5$. Haz una gráfica de la función y = seno x. Nota que en este caso, x es el valor del ángulo y y es el valor de la función. ¿Se parece tu gráfica a la gráfica en el Figura 3.17?**
3. **Ahora fija la calculadora para la función Radian (Radián). Vas a necesitar fijar WINDOW para los valores apropiados en radianes. El dominio en radianes sería**

$$\frac{-\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{3}$$

Haz una gráfica de la función y = seno x. ¿Se parece a la gráfica de la Figura 3.17?

SENO

GRAPH

Figura 3.17

La función del seno es un ejemplo de una función circular. La máquina de función puede ser programada fácilmente para producir diferentes funciones dependiendo del procedimiento que utilice la máquina. Por ejemplo, considera la máquina de función en la Figura 3.18. Esta máquina de función es usada en conjunto con el diagrama en la Figura 3.19.

60º
ENTRADA

INSTRUCCIONES PARA EL PROCESAMIENTO

Dibuja una línea de *0* para hacer un ángulo con el eje de *x* igual al valor de entrada.
La salida es la coordenada de *x* del punto dónde esta línea interseca el círculo.

0.5
SALIDA

Figura 3.18

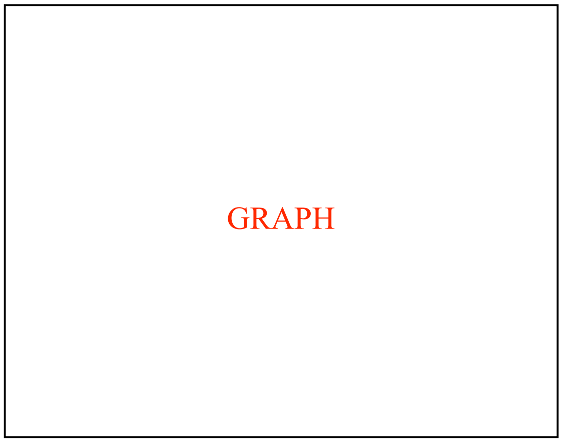

Figura 3.19

Nuevamente, el radio del círculo es exactamente una unidad y las líneas de puntos están a una distancia de 0.1 unidades. Úsalas para ayudar a estimar las coordenadas de *x*. Por ejemplo, si dibujas un ángulo de 60º como el mostrado, el valor de salida sería aproximadamente 0.5. Esto quiere decir que un par ordenado para la función sería (60º, 0.5).

Usa tu copia de la unidad de círculo y la máquina de función junto con su regla definida para generar una tabla de valores para esta función para los ángulos de −60º, −30º, 0º, 30º, 60º, ..., 360º, 390º y 420º. Haz una tabla igual a la siguiente para ayudarte a organizar tu trabajo.

Ángulo	−60º	−30º	0º	...	30º	60º	360º	390º	420º
Valor de la función				...					

1. **¿Habrá un ángulo correspondiente para cada punto en la unidad de círculo?**
2. **¿Habrá un punto correspondiente para cada ángulo en la unidad de círculo?**
3. **Traza estos pares ordenados en una gráfica. Comenta sobre lo que notes, particularmente de qué maneras esta curva es similar a o diferente de la gráfica de la función del seno.**

Tu gráfica debe parecerse a la gráfica en la Figura 3.20.

Valor de la función

Ángulo

Figura 3.20

Si dibujas la gráfica trazando los puntos cada 3º en vez de cada 30º, los puntos ahora comienzan a formar una curva suave como la mostrada en la Figura 3.21.

Valor de la función

Ángulo

Figura 3.21

1. **Explica por qué los pares ordenados en la gráfica en la Figura 3.21 forman una función.**
2. **Explica por qué la función parece ser periódica.**
3. **¿Cuál es el período de esta función?**

4. **¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de esta función?**
5. **¿Para cuáles valores del ángulo parece ser 0 el valor de la función?**

A esta función circular se le conoce como la *función del coseno*. El valor de la función del coseno para cualquier ángulo se puede encontrar tanto usando la unidad del círculo como usando el botón de COS en la calculadora.

COSENO

1. **Verifica cada uno de los valores que encontraste de la unidad de círculo en contra de los valores de la calculadora. ¿Cuán cercanos están?**
2. **Fija la calculadora a la función Degree (grados) y ajusta WINDOW para $-30 \leq x \leq 420$ y $-1.5 \leq y \leq 1.5$. Haz una gráfica de la función y = coseno de x. Nota que en este caso, x es el valor del ángulo y y es el valor de la función. ¿Cómo compara tu gráfica con la de la Figura 3.22?**
3. **Ahora, fija la calculadora en la función Radian (Radián). Vas a necesitar fijar WINDOW para los valores apropiados en radianes. El dominio en radianes sería**

$$\frac{-\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$$

Haz una gráfica de la función y = coseno x. ¿Cómo compara tu gráfica con la de la Figura 3.22?

GRAPH

Figura 3.22

Nota que las curvas del seno y el coseno tienen la misma forma, pero una está movida 90º en relación a la otra. Los ángulos que tienen una suma de 90º son ángulos **complementarios**.

De manera tal que el coseno de cualquier ángulo agudo es el seno de su ángulo complementario.

seno x = coseno $(90^{\circ} - x)$ o coseno x = seno $(90^{\circ} - x)$, donde $0^{\circ} \leq x \leq 90^{\circ}$

Como vimos en los ejercicios anteriores, la máquina de función puede ser programada para producir diferentes funciones dependiendo del procedimiento que es parte de la máquina. Este último conjunto de instrucciones de procesamiento producirá otra función circular.

30º ENTRADA	INSTRUCCIONES PARA EL PROCESAMIENTO Dibuja una línea de *0* para hacer un ángulo con el eje de x igual al valor de entrada. La salida es la coordenada de y del punto donde esta línea interseca la tangente al círculo.	0.58 SALIDA

Figura 3.23

La máquina de función en la Figura 3.23 es usada junto con el diagrama en la Figura 3.24.

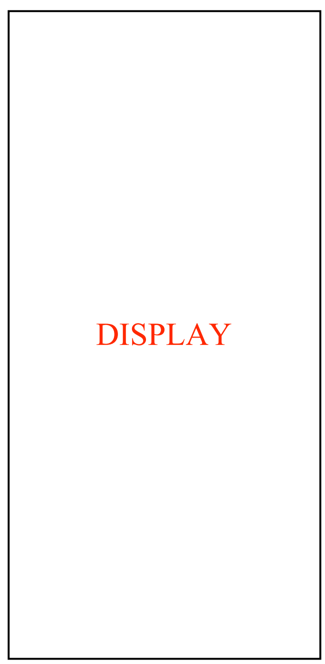

Figura 3.24

Este diagrama ilustra un círculo junto con una línea tangente. Recuerda que una tangente es una línea que interseca un círculo en solamente un punto.

Nuevamente, el radio del círculo es exactamente una unidad. Las marcas en la línea tangente son 0.1 unidades. La salida para una entrada de 30º es ilustrada. Esta es aproximadamente 0.58. Por consiguiente, un par ordenado para esta función sería (30º, 0.58).

Usa tu copia de la unidad de círculo y la máquina de función junto con su regla definida para generar una tabla de valores para esta función para ángulos de −60º, −45º, −30º, 0º, 30º, 45º, 60º, ..., 360º, 390º y 420º. (*Pista:* Si el rayo terminal del ángulo no choca contra la línea de la tangente, extiende el otro extremo hasta que lo haga). Haz una tabla similar a esta para ayudarte a organizar tu trabajo.

Ángulo	−60º	−30º	0º	...	30º	60º	360º	390º	420º
Valor de la función				...					

1. **¿Habrá un ángulo correspondiente para cada punto en la línea tangente? Explica.**
2. **¿Habrá un punto correspondiente para cada ángulo en la línea tangente? Explica.**

Los ángulos que no producen valores son los de 90º y 270º (y todos los coterminales equivalentes). Es útil dibujar líneas de puntos verticales en estos valores de los ángulos en el eje de *x*, de manera que sabemos que la función es indefinida en estos valores.

3. **Ahora traza los pares ordenados en tu tabla de valores en una gráfica.**
4. **Cuando una curva no se comporta como quisiéramos, es necesario, algunas veces, usar más puntos de datos para obtener una curva buena. A esta función se le conoce como la *función de la tangente* y puedes obtener unos cuantos puntos más usando el botón TAN en la calculadora. Obtén valores de función para 70º, 75º y 80º usando la calculadora y traza estos pares ordenados en la gráfica.**
5. **Trata de dibujar una curva suave a través de los puntos. Comenta sobre lo que notes, particularmente, de qué modos esta curva es similar o diferente de las gráficas de las funciones del seno y del coseno.**

TANGENTE

Tu gráfica debe parecerse a la gráfica de la Figura 3.25. A pesar del comportamiento extraño de esta gráfica en los 90º y 270º, es aún generada de un círculo como las funciones del seno y del coseno.

Function value = Valor de la función

Angle = Ángulo

Figura 3.25

1. **Explica por qué los pares ordenados en la gráfica forman una función.**
2. **Explica por qué la función parece ser periódica.**
3. **¿Cuál es el período de la función?**
4. **¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de esta función?**
5. **¿Para cuáles valores de la función parece ser 0 el valor de la función?**
6. **¿Para cuáles valores del ángulo parece ser indefinido el valor de la función?**
7. **¿Cuáles son el dominio y el alcance de la función de la tangente?**

Trata de encontrar la tangente de 90º usando tu calculadora. ¿Qué sucede? Explica.

1. **Verifica cada uno de los otros valores que encontraste de la unidad de círculo en contra de los valores de la calculadora. ¿Cuán cercanos están?**
2. **Usa tu calculadora para hacer una gráfica de la función y = tangente x. Nota que en este caso x es el valor del ángulo y y es el valor de la función. Asegúrate de fijar la calculadora a la función Degree (grados) antes de comenzar y fija WINDOW para**

$$-60 \le x \le 420 \text{ y } -15 \le y \le 15$$

¿Se parece tu gráfica a la gráfica de la Figura 3.26? Si no es así, ¿cómo es diferente?

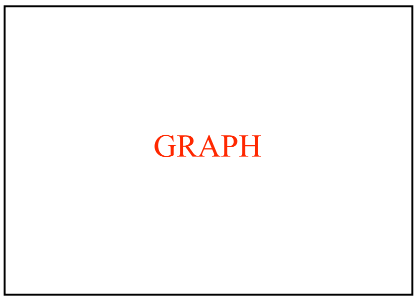

Figura 3.26

Explica de qué manera(s) la gráfica de la Figura 3.26 es diferente de la gráfica de la Figura 3.25. Toma unos minutos y trata de establecer la(s) razón(es) para cualquier diferencia.

1. **¡Si tu gráfica se parece a la gráfica de la Figura 3.26, ésta no es correcta! Una de las cosas más importantes de las calculadoras es que éstas economizan mucho tiempo y esfuerzo. Uno de los problemas es que éstas no pueden pensar. La calculadora solamente genera una tabla de valores para la función, y entonces, llena los espacios entre los puntos con segmentos cortos de línea. Usa tu calculadora para evaluar la tangente de 89º y la tangente de 91º. En este caso, el valor en 89º es 57.3 y el valor en 91º es −57.3. La calculadora junta estos dos puntos con un segmento de línea – aún cuando sabemos que no puede haber un valor de la función en 90º.**

Sugerencia

Recuerda observar cuidadosamente. Recuerda siempre verificar si el cuadro que te provee la calculadora es razonable –podría ser incorrecto.

2. **Usa el modo "dot" (puntos) en vez del modo "connected" (conectados) en tu calculadora y haz la gráfica de nuevo. Explica por qué la gráfica ya no parece tener líneas verticales.**
3. **Nota que aunque la curva sube muy rápidamente y se acerca más y más a la línea dibujada a través del valor de 90º en el eje de x, ésta casi nunca toca esta línea. ¿Qué nombre le damos a una línea a la cual una curva se le acerca pero casi nunca la toca?**

Conjunto de ejercicios: 3.3

1. Dibuja una gráfica similar a la mostrada abajo y úsala para ayudarte a resumir las características importantes acerca de las tres funciones y = seno x, y = coseno x, y = tangente x.

Función	y = **seno** x	y = **coseno** x	y = **tangente** x
Dibujo de gráfica (1 ciclo completo)			
Dominio			
Alcance			
Valor máximo de y (si alguno)			
Valor mínimo de y (si alguno)			
Ceros de la función			
Posiciones de las asíntotas (si alguna)			

2. Hemos definido la rotación de los ángulos como positiva si la dirección de la rotación es en sentido contrario a las agujas del reloj. Si definimos la rotación positiva de los ángulos para que sean aquellas producidas por la rotación en el sentido de las agujas del reloj, ¿cómo luciría la gráfica de la función del seno? Dibuja un ciclo completo.

3. Si definimos la rotación positiva de los ángulos para que sean aquellas producidas por la rotación en el sentido de las agujas del reloj, ¿cómo luciría la gráfica de la función del coseno? Dibuja un ciclo completo.

4. Si definimos la rotación positiva de los ángulos para que sean aquellas producidas por la rotación en el sentido de las manecillas del reloj, ¿cómo luciría la gráfica de la función de la tangente? Dibuja un ciclo completo.