3.6 Inversos de tres funciones trigonométricas

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás

Determinar el inverso de las funciones del seno, coseno y la tangente

Hacer una gráfica del inverso de estas tres funciones

Identificar la relación entre las gráficas de las funciones y su inverso

Evaluar el inverso de las funciones usando una calculadora.

En el Capítulo 1 fuiste introducido a la idea del inverso de una función, y en el Capítulo 2 usamos esta idea para desarrollar la función logarítmica. Recuerda que cuando encontramos la ecuación del inverso de una ecuación, intercambiamos la x y la y (variables dependientes e independientes) en la ecuación. Si una función es definida por y = seno x (donde $-\infty < x < \infty$), entonces, una ecuación para el inverso de esta función sería x = seno y. Anteriormente, consideramos también el inverso de una función gráficamente. Recuerda, además, que la gráfica del inverso de una función es un reflejo exacto de la gráfica de la función en la línea $y = x$. Esto es ilustrado en la Figura 3.31 para la función del seno.

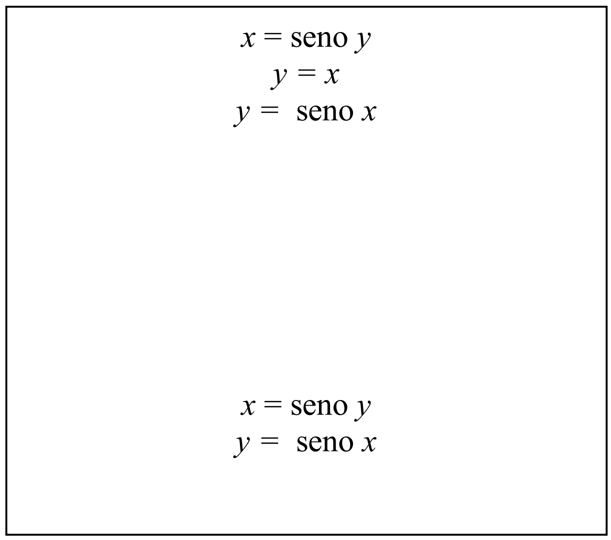


Figura 3.31

1. **La gráfica de y = seno x, (donde $-7 < x < 7$ y x está dada en radianes) es ilustrada como una curva de puntos en la Figura 3.31. ¿Es esta función una función de uno a uno? Explica.**

2. **¿Es la gráfica del inverso de la función y = seno x (mostrada como una línea curva sólida en la Figura 3.31), la gráfica de una función? Explica.**
3. **¿Cuál es el alcance de la función y = seno x?**
4. **¿Cuál dominio escogerías para y = seno x, de modo que el inverso de la función del seno es también una función?**
5. **¿Cuál sería el alcance del inverso de la función del seno?**

Recuerda que el inverso de una función es también una función, si la función original es de uno a uno. Debido a que la función del seno, cuando es definida para cualquier valor de x no es una función de uno a uno –una línea horizontal la interseca más de una vez– su inverso no es una función. Si restringimos el dominio de la función del seno de modo que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ó $-90^{\circ} \leq x \leq 90^{\circ}$, sin embargo, la gráfica será como la mostrada en la Figura 3.32 como una curva con puntos. Ahora, una línea horizontal intersecará la gráfica solamente una vez, de modo que es una *función de uno a uno*. El inverso de esta función también será una función. Es ilustrado como una línea sólida en la Figura 3.32.

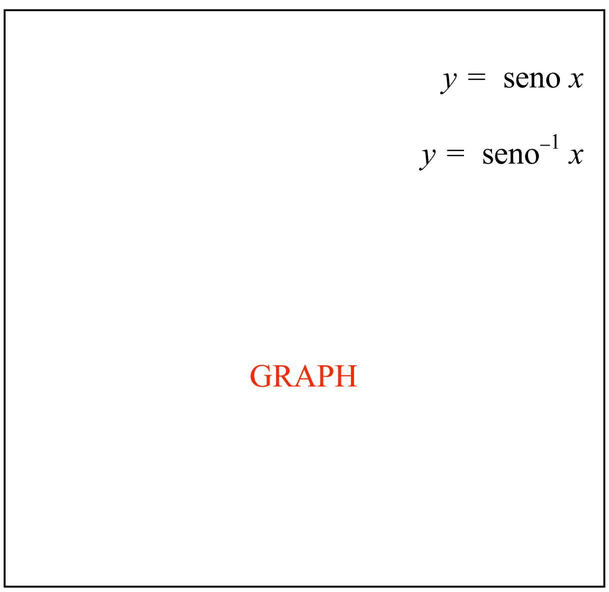
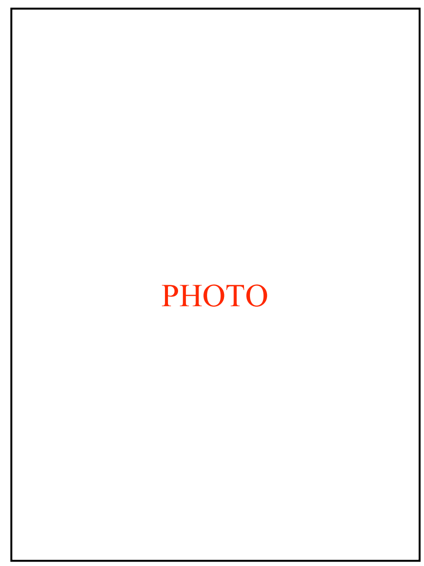


Figura 3.32



1. **¿Cuál es el dominio del inverso de la función del seno?**
2. **¿Cuál es el alcance del inverso de la función del seno?**

Recuerda que cuando y = seno x, x es el ángulo y y es un valor numérico. Ahora que hemos establecido cómo garantizar que el inverso de la función del seno también será una función, es útil tener una ecuación para la función inversa en la forma de $y = f(x)$ en vez de x = seno y. Pensemos sobre lo que esto sería en palabras. Si x = seno y, x es el valor numérico y y es el ángulo. Esto es escrito como y = seno^{-1} x y significa solamente que −"y es el ángulo cuyo seno es x", teniendo en mente que el dominio del inverso de la función del seno es definido solamente por $-1 \leq x \leq 1$ y el alcance es $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Esta notación es fácil de confundir porque se parece un poco a la regla recíproca de exponentes negativos, pero no lo es. El recíproco del seno x es (seno x)$^{-1}$ ó $\frac{1}{\text{seno } x}$, lo cuál **no** es igual a seno^{-1} x. Nota la diferencia entre (seno x)$^{-1}$ (el recíproco) y seno^{-1} x (el inverso). Aunque la notación parecería confusa al principio, es consistente. En general, denotamos una función por f y su inverso por f^{-1}. Si la función es seno x, la función inversa sería seno^{-1} x, lo cuál se lee como *seno inverso*. Igualmente, las otras funciones trigonométricas tienen inversos denotados como coseno^{-1} x y tangente^{-1} x.

Si tú evalúas seno^{-1} (0.5) en el modo radián, usando el botón de SIN^{-1} en tu calculadora, el resultado será seno^{-1} (0.5) $\approx 0.524 \approx \frac{\pi}{6}$. Puedes verificar esto observando que seno $\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$. Nota que debido a que el alcance del inverso de la función del seno es $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, la calculadora siempre te dará una respuesta en algún punto en este alcance.

1. **Escribe en palabras lo que significa cada una de las siguientes:**
   (a) seno^{-1} 0.57 (b) coseno^{-1} 0.864 (c) tangente^{-1} 0.5
   (d) seno^{-1} 0.79 (e) tangente^{-1} 3.564 (f) coseno^{-1} 0.236
2. **Fija tu calculadora a la función Degree (grados) y evalúa (a) − (f) en el problema 1.**
3. **Fija tu calculadora a la función radián y evalúa (a) − (f) en el problema 1. Convierte las respuestas de la parte (a) en grados y verifica que es igual a la respuesta del problema 2(a).**
4. **Usa tu calculadora en la función Degree (grados) para evaluar seno^{-1} 1.3. Explica lo que sucede y por qué.**

5. **Usa tu calculadora en la función Degree (grados) para evaluar seno^{-1} (−1). Ahora, usa tu calculadora para encontrar el seno de este ángulo. Encuentra un ángulo coterminal positivo equivalente a este ángulo y encuentra su seno. Explica.**

Ya hemos establecido el dominio y el alcance para la función y = seno^{-1} x. Podemos confirmar nuestro resultado y explorar el dominio y el alcance para otras funciones trigonométricas inversas usando la calculadora gráfica.

1. **Haz una gráfica de la función y = seno^{-1} x. Fija WINDOW de manera que $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ y las escalas x y y sean 1 cada una.**
   (a) **¿Cuál es el dominio?**
   (b) **¿Cuál es el alcance?**
2. **Repite el problema 1 para y = coseno^{-1} x.**
3. **Repite el problema 1 para y = tangente^{-1} x.**

REFLEXIONA

En este capítulo has visto cómo las matemáticas pueden ser usadas para modelar muchas cosas que ocurren en el mundo alrededor de nosotros. Al desarrollar estos modelos, has sido introducido a una cantidad de ideas matemáticas nuevas, tales como las curvas trigonométricas, las transformaciones y las funciones trigonométricas inversas. Todos estos tópicos van a aparecer de nuevo si decides continuar tu estudio de las matemáticas; pero, aún si no lo haces, te han dado una idea de cuánta matemática hay alrededor de nosotros –¡aunque las veamos o no!

Conjunto de ejercicios: 3.6

1. La gráfica de x = coseno y para $-1 \leq x \leq 1$ es ilustrada en la Figura 3.33.
   (a) ¿Es ésta gráfica una función? Explica.
   (b) Si el punto (a, 5.49779) es un punto en la curva, entonces, encuentra el valor de a.
   (c) Encuentra las coordenadas del punto en la curva (a, b).

Figura 3.33

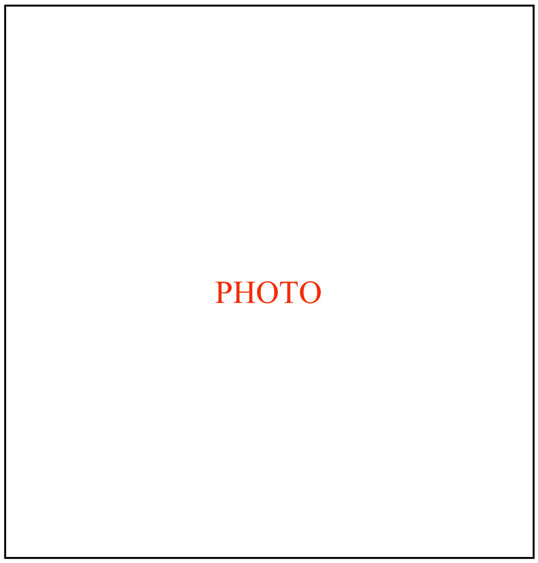
2. Una rueda gigante (noria)en el parque de diversiones está siendo montada en un carnaval local para celebrar el bicentenario del pueblo. Esta mide 48 pies de diámetro y el asiento de abajo se encuentra a seis pies del suelo. La noria da vueltas en el sentido de las agujas del reloj a un ritmo de tres revoluciones por minuto. Marvin el matemático, se monta en uno de los asientos y es gradualmente elevado al punto más alto de la noria mientras otras personas se montan y se bajan. Entonces, él le grita al operador que se encuentra a punto de comenzar, "¿Cuántas revoluciones tengo por mis 50 centavos?" El operador le contesta que el recorrido tiene una duración de cinco minutos.

El recorrido comienza y Marvin decide tratar de establecer una función matemática que le diga cuán lejos del suelo él se encuentra en cualquier tiempo t. Después de algunos cálculos, él decide que debe ser una ecuación en la forma de $D = A$ coseno $\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + k$

donde D es la distancia de Marvin del suelo, y p es el período (en segundos). Si Marvin está en lo correcto

(a) ¿Cuál sería la amplitud de esta función? ¿Qué letra la representa?

(b) ¿Qué representa la variable *k*? ¿Cuál es su valor?
(c) ¿Cuál es el período?
(d) Establece una fórmula que prediga la altura de Marvin en cualquier momento después que comienza el recorrido.
(e) ¿Cuán elevado del suelo estará el asiento de Marvin después de 5 segundos? ¿Después de 10 segundos? ¿Después de 12 segundos?



3. Así resulta, que las sillas en la noria están numeradas del 1 al 20 y Marvin está sentado en el asiento número 1. Cuando el recorrido se detiene completamente, y Marvin se encuentra nuevamente en el punto más alto del recorrido, él mira a su alrededor y nota que otras personas en el recorrido se encuentran a distancias verticales diferentes de él (medidas en una línea recta hacia abajo) dependiendo de en cuál asiento ellos se encuentran. Él nota también que hay personas a diferentes distancias del suelo (medidas en una línea recta hacia abajo) dependiendo de en cuál asiento ellos se encuentran.

(a) Dibuja un diagrama para representar la noria a este punto.
(b) ¿Cuán lejos se encuentra Marvin del suelo?
(c) Si alguien está sentado en un asiento que se encuentra exactamente a 15.89 pies del suelo, ¿cuál es el número del asiento?

(d) Tú tienes una buena vista del resto del parque mientras te encuentres al menos a 12 pies del suelo. ¿Cuántas personas tienen una buena vista del parque en ese momento?

(e) Si tú estuvieras en el asiento número 7 ó el 15, ¿cuán elevado te encontrarías del suelo?

(f) ¿Cuál es la distancia vertical entre las personas en la silla 4 y la silla 12?

PHOTO