

4.2 Permutaciones: Relájate, revisa y cuenta nuevamente

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Usar el Principio fundamental del conteo para resolver problemas de conteo

Usar las permutaciones para resolver problemas de conteo

Encontrar relaciones entre los factoriales

Explicar las dificultades al usar permutaciones para resolver problemas de diagramas de bloques.

Veamos. ¿Dónde nos encontramos en nuestro estudio del conteo? Ah, sí. Anteriormente, en *MATH Connections*, los árboles y los diagramas Venn fueron usados como herramientas para el conteo. Nuestra última herramienta fue el Principio fundamental del conteo (FCP, por sus siglas en inglés). En caso de que te hayas olvidado de este principio, lo expondremos nuevamente.

FUNDAMENTAL COUNTING PRINCIPLE

Dos Acciones: Si una acción puede ser tomada de r formas, y, para cada una de esas r formas se puede tomar una segunda acción en s formas, entonces, estas dos acciones pueden ser tomadas en r formas.

Tres Acciones: Si una acción puede ser tomada en r formas, y para cada una de esas r formas, se puede tomar una acción en s formas, y, para cada una de esas s formas, se puede tomar una tercera acción en t formas, entonces, estas tres acciones pueden ser tomadas en r formas.

Acciones K: Si una acción se puede tomar en n_1 formas, y para cada una de esas n_1 formas, se puede tomar una segunda acción en n_2 formas, y para cada una de esas n_2 formas, se puede tomar una tercera acción en n_3 formas, y así sucesivamente hasta una acción K , que puede ser tomada en n_K formas, entonces, en una secuencia de K , estas acciones se pueden tomar en

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_K$$

formas.

Para que puedas revisar el FCP, sugerimos que consideres los siguientes problemas:



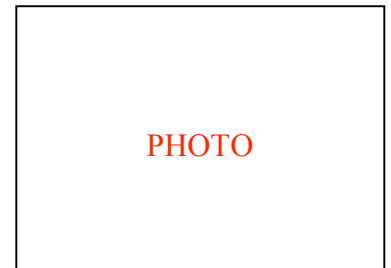
1. **Una caja de recetas para comidas se divide en platos. Hay cinco recetas bajo sopas, siete bajo plato principal, y nueve bajo postres. ¿De cuántas maneras pueden ser seleccionadas las recetas de la caja para una comida de tres platos?**
2. **Si las placas de matrícula de un automóvil tienen tres letras seguidas por tres números, ¿cuántas placas de matrícula diferentes se pueden hacer, si todos los dígitos deben ser diferentes en una placa de matrícula, pero las letras se pueden repetir?**

PHOTO

3. Una compañía tiene 783 empleados. Explica cuidadosamente por qué debe haber al menos dos empleados con el mismo par de iniciales.
4. Una tienda de ropa popular tiene nueve tamaños diferentes de camisas, cada tamaño en ambos diseños para hombres y mujeres, cada una hecha en seda, algodón o lana, y cada una ha sido tejida en dos tejidos diferentes. ¿Cuántos tipos diferentes de camisas tiene la tienda?
5. Si las placas de matrícula de vehículos tienen tres letras seguidas por tres números, no pudiendo ser el primer dígito cero, ¿cuántos tipos diferentes de placas de matrícula se pueden conseguir si se permite que los dígitos o las letras se repitan?

El Principio fundamental del conteo es una herramienta clave para el conteo del arreglo de objetos escogidos de un conjunto, donde el orden de los objetos en el arreglo es importante. ¿Qué significa cuándo se dice que el orden es importante? Observa los siguientes problemas A y B.

- A. Del conjunto de 10 estudiantes {Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie}, se selecciona un comité de tres para trabajar en las decoraciones para el Junior Prom de escuela intermedia. ¿Cuántos comités diferentes de tres personas se pueden formar?
- B. Del conjunto de 10 estudiantes {Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie}, un estudiante votante es capaz de seleccionar un presidente, un vicepresidente, y un secretario de la clase junior (ninguna persona puede ocupar dos posiciones). ¿En cuántas formas diferentes puede un votante seleccionar tres personas como oficiales para la clase junior?



Las siguientes preguntas y actividades se refieren a los problemas A y B de arriba.

1. No se espera que resuelvas ambos problemas. Sin embargo, uno de los problemas puede ser resuelto fácilmente por el uso simple del FCP. ¿Cuál de éstos? ¿Cuál es la solución?
2. ¿Por qué es la palabra *orden* importante al tratar de resolver problemas de este tipo?



3. **¿Cómo explicarías a un amigo que el Principio fundamental del conteo es una herramienta clave para el conteo del arreglo de objetos escogido de un conjunto, donde el orden de los objetos en el arreglo es importante?**
4. **Elabora dos otros ejemplos que ilustren la diferencia entre la importancia o no importancia del orden.**

Al contar la cantidad del arreglo de objetos, es importante, además, saber si un objeto puede ser o no repetido. Resuelve los problemas siguientes:



1. **En el estado de Euphoria, las placas de matrícula deben consistir precisamente de cinco dígitos, y ningún dígito se puede repetir. ¿Cuántos tipos diferentes de placas de matrícula se pueden hacer?**
2. **Un movimiento de reforma en el estado de Euphoria ha llevado a la revisión de las placas de matrícula. Las placas de matrícula deben aún consistir precisamente de cinco dígitos, pero, los dígitos se pueden repetir. ¿Cuántos tipos diferentes de placas de matrícula se pueden hacer?**

Nota que las respuestas a las preguntas 1 y 2 de arriba son muy diferentes, porque en uno de los problemas la repetición es permitida, mientras en el otro problema no se permite la repetición.

Estamos ahora en una posición de formalizar algunas de las ideas que hemos visto manifestarse del Principio fundamental del conteo.

Supongamos que uno tiene un conjunto de cinco objetos, como en el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Nuestro trabajo es encontrar cuántos tipos diferentes del arreglo se pueden hacer con tres letras de este conjunto, donde el orden es importante y no se permite la repetición. Por ejemplo, (a, b, c) , (b, c, a) , y (b, c, e) son tres de dichos arreglos. Nota que al escribir un arreglo donde el orden es importante, utilizamos los paréntesis, $()$. Nuestro trabajo aquí es llenar tres espacios en

(__, __, __)

Hay cinco maneras de llenar el primer espacio. Después de esto, hay cuatro maneras de llenar el segundo espacio. Finalmente, hay tres maneras de llenar el tercer espacio.

5 maneras 4 maneras 3 maneras

Por el Principio fundamental del conteo hay

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

de dichos arreglos.

¿Cuántos arreglos diferentes se pueden hacer con cuatro letras del conjunto {a, b, c, d, e, f, g} donde el orden es importante y no se permite la repetición?



Una generalización de este proceso es la siguiente: considera un conjunto con N objetos distintos, digamos $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\}$. Tú quieres contar todas los arreglos posibles de r de estos objetos, $0 < r \leq N$, donde el orden es importante y no se permite la repetición. Nuestro trabajo es llenar los espacios de r como en

(, , , ... , ,)

espacios r

El primer espacio puede ser llenado de N maneras, el segundo en $N - 1$ maneras, el tercero en $N - 2$ maneras, y así sucesivamente, hasta que r cantidad de espacios puedan ser llenados en $N - r + 1$ maneras.

1. **¿Cómo explicarías a un amigo que la cantidad de espacios r puede ser llenada en $N - r + 1$ maneras?**
2. **¿De cuántas maneras el espacio $(r - 1)$ puede ser llenado?**

(, , , ... , ,)

espacio $(r - 1)$ (PLACE ARROW HERE)

Procede que del Principio fundamental del conteo hay

$$N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot (N - 3) \cdot \dots \cdot (N - r + 1)$$

arreglos diferentes que se pueden hacer de r objetos tomados de N objetos, donde el orden es importante y no se permite la repetición.

A dicho arreglo se le conoce como una *permutación* de N objetos tomados r veces a la vez. La cantidad de dichos arreglos es denotada con frecuencia (aún en las calculadoras) por ${}_N P_r$. Esto es,

$${}_N P_r = N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot (N - 3) \cdot \dots \cdot (N - 1 + r)$$

No hay necesidad de memorizar esta fórmula, pero, debes comprender su significado y su construcción.



1. Encuentra una relación entre ${}_9 P_5$ y ${}_9 P_4$. ¿Puedes contestar esta pregunta sin calcular uno u otro, ${}_9 P_5$ ó ${}_9 P_4$? Explica.
2. Encuentra una relación entre ${}_{17} P_8$ y ${}_{18} P_9$. ¿Puedes contestar esta pregunta sin calcular uno u otro, ${}_{17} P_8$ ó ${}_{18} P_9$? Explica.
3. Escribe, en palabras, qué significan los símbolos ${}_N P_N$. Escribe una fórmula para ${}_N P_N$.
4. Escribe ${}_{14} P_7$ en términos de ${}_{12} P_5$.

Recuerda que los productos, tales como $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ y, en general, $N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot (N - 3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ tienen nombres adjuntos a ellos. El producto

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

se le conoce como “factorial 9” y es denotado por $9!$. En general el producto de

$$N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot (N - 3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

se le conoce como *factorial* N y es denotado por $N!$. Por convención, tomamos $0! = 1$.



1. (a) Encuentra una relación entre $14!$ y $15!$
(b) Encuentra una relación entre $19!$ y $20!$
2. (a) Encuentra una relación entre $N!$ y $(N + 1)!$
(b) Encuentra una relación entre $N!$ y $(N - 1)!$
3. Escribe $19!$ como una expresión que envuelva $17!$
4. ¿Cómo escribirías $(N + 1)!$ como una expresión que envuelva $(N - 1)!$?
5. Encuentra N y r , de manera que ${}_N P_r = \frac{15!}{9!}$

Hemos mirado detenidamente los arreglos de r objetos tomados de N objetos, donde el orden es importante y no se permite la repetición. Supongamos que se permite la repetición. Tú has resuelto ya problemas donde esto era posible, por ejemplo:

Si las placas de matrícula van a consistir de cinco dígitos y si la repetición es permitida, ¿cuál es la cantidad de placas de matrícula diferentes que se pueden hacer?

Veamos si puedes generalizar este proceso. De un conjunto de N objetos distintos, vamos a formar arreglos de t objetos donde el orden es importante, pero, la repetición es permitida.



1. ¿Cuál es la cantidad total de arreglos diferentes que se pueden hacer bajo estas condiciones?
2. **Elabora un problema para el cuál este resultado puede ser usado.**

Ahora, vuelve al problema “grande” de la Sección 1. Queremos ser capaces de contar la cantidad total de rutas de A a B en un diagrama de bloque tal como el de 4 H 4 mostrado en la Figura 4.8. Recuerda, en cada esquina, uno debe ir al norte o al este.

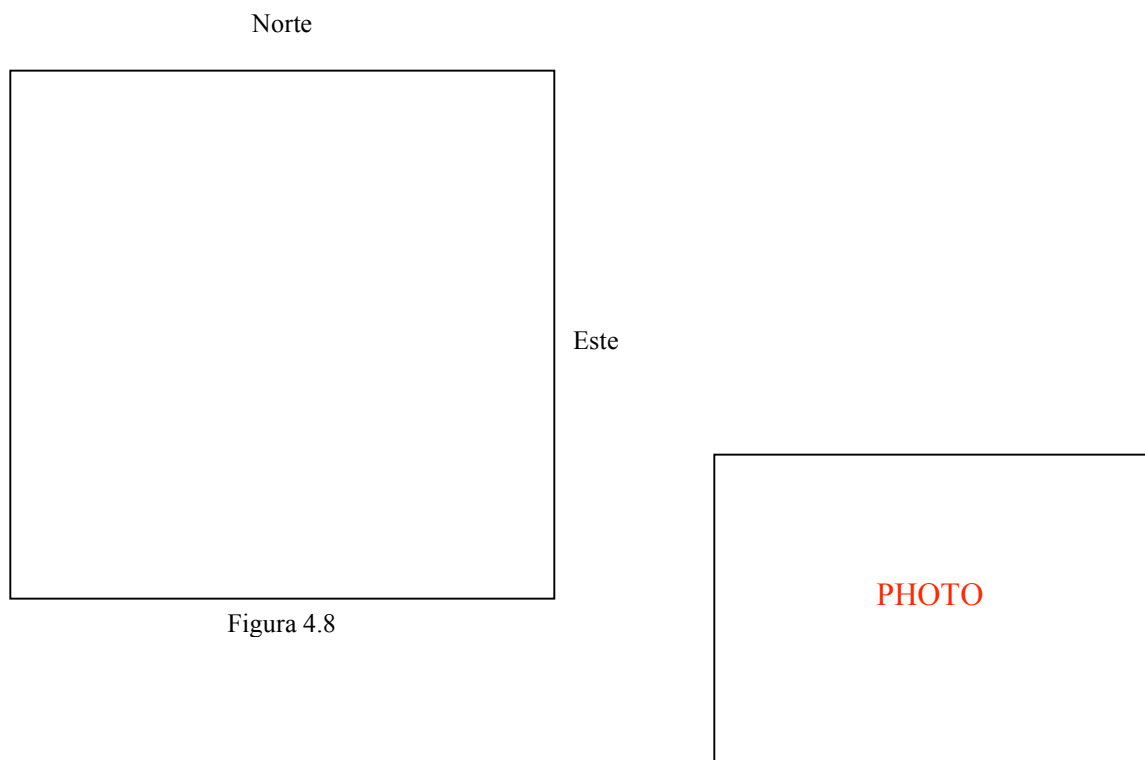


Figura 4.8

Usando E y N , ¿cómo denotarías la ruta en la Figura 4.10?



Debe estar claro que en el diagrama de bloque 4 H 4, cada ruta va a ser denotada por ocho letras: cuatro E y cuatro N . Por ejemplo,

ENEENNEN

representa una ruta. La cantidad de rutas en un diagrama de bloque 4 H 4 será la cantidad total de arreglos que podemos hacer con ocho letras –cuatro E y cuatro N . Sin embargo, ninguna de las herramientas desarrolladas en esta sección lleva directamente a una solución de este problema. Continuaremos trabajando en esta dirección en la próxima sección.

Conjunto de ejercicios: 4.2

En los siguientes ejercicios, se requieren respuestas numéricas. ¡Utiliza una calculadora!

- Una compañía de seguros clasifica los conductores de edad escolar por género, año de la clase (noveno grado, décimo grado, etc.), y promedio de las notas (A, B, C, D, F).
 - ¿Cuántas clasificaciones diferentes tiene la compañía para conductores de edad escolar?
 - ¿Cuántas clasificaciones hay para los estudiantes con grados promedio de B o mejores?
- En la ciencia de computadoras una cadena binaria es una lista (secuencia) de ceros (0) y unos (1) usados para representar un número, una letra o algún otro tipo de información. Por ejemplo, 001010110 es una cadena binaria con una longitud de 9; 0101 es una cadena binaria con una longitud de 4; y 11011 es una cadena binaria con una longitud de 5.

¿Cuántas cadenas binarias hay en

 - una longitud de 9?
 - una longitud de 9, la cual comienza y termina con 0?
 - una longitud de 9, la cual comienza o termina con 1?
 - una longitud de 9, la cual tiene como segundo dígito al 0?
 - una longitud de 9, la cual comienza con 01 y tiene como cuarto dígito al 1?
- ¿Cuántos dígitos hay en un número de Seguro Social? ¿Cuántos números de Seguro Social son posibles?

PHOTO

4. Los nombres de las estaciones de radio y televisión, como KYW y WCAV comienzan con la letra K ó W seguida por cualquiera de dos o tres letras. ¿Cuántos nombres de estaciones son posibles?
5. (a) ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 2, 4, 6, 8, 9, si cada dígito se usa un máximo de una vez.
(b) ¿Cuántos de estos números de tres dígitos son más pequeños de 500?
6. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden hacer usando todas las letras de la palabra *obtain*, exactamente una vez.
7. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden hacer usando todas las letras de la palabra *storage*, exactamente una vez.
8. En una clase de 25 estudiantes, cada uno recibió una nota diferente en una prueba corta de matemáticas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden arreglar estas 25 pruebas cortas en una pila, de manera que el papel con la nota más alta se encuentre en la parte superior, y el papel con el grado más bajo sea el segundo desde arriba?
9. Hay siete rutas de Nueva York a Chicago y cinco rutas de Chicago a Denver. ¿De cuántas maneras diferentes se puede planificar un viaje de ida y vuelta de Nueva York a Denver, pasando por Chicago, de manera que no se utilice la misma ruta dos veces?
10. El señor y la señora Smith se encuentran en una fila (cola) con otras 10 personas. ¿De cuántas maneras pueden estas 12 personas ser arregladas en esta fila de manera que el señor y la señora Smith no estén juntos?
11. ¿De cuántas maneras pueden nueve personas sentarse en una mesa redonda? Si estas personas están sentadas, pero, cada una, poco a poco se mueve la misma cantidad de asientos en la misma dirección, el arreglo de las personas se considerará ser el mismo.
12. En California hay 19,953,134 automóviles registrados.
 - (a) Si uno es restringido a utilizar sólo dígitos y una placa de matrícula debe contener por lo menos uno, pero, no más de n dígitos, (un dígito puede ser usado más de una vez en una placa), ¿cuál es el valor más pequeño de n , de manera que se pueda hacer una cantidad suficiente de placas?
 - (b) ¿Cómo cambia este resultado si se le permite a uno utilizar dígitos o letras, con las letras I, L, O, y S estando prohibidas debido a posible confusión con ciertos dígitos?

PHOTO