

4.3 Objetos idénticos: Los arreglos no son creados iguales

Nuestro objetivo es ser capaces de contar la cantidad de rutas en un diagrama de bloque. Esto es necesario si vamos a determinar la cantidad de adiciones requeridas de una computadora para encontrar, mirando todas las rutas posibles, la ruta más rápida para un vehículo, tal como una ambulancia, un camión de bomberos, o un vehículo de policías. Por ejemplo, sabemos ahora que un trayecto en un diagrama de bloque de 10 H 10 (Figura 4.11) consistirá de 20 letras: 10 *E* y 10 *N*.

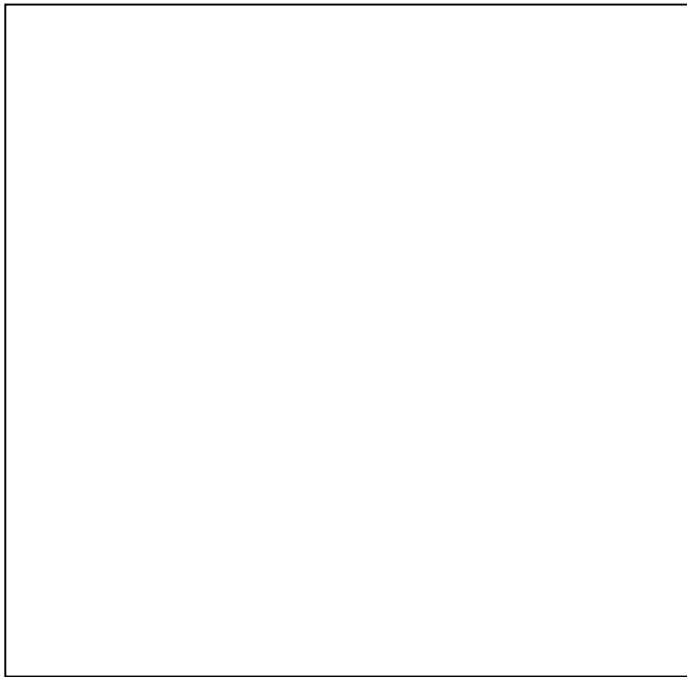


Figura 4.11

Un ejemplo es

ENNENEENNENEENNENEEN

Por consiguiente, nuestro objetivo inmediato es encontrar cuántos arreglos se pueden hacer de una lista de 20 letras: 10 *E* y 10 *N*. Para poder resolver este problema, nos ayudaría observar otros problemas similares, aunque uno espera que sean problemas más simples.

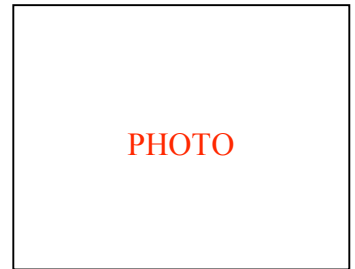
Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Resolver problemas de conteo donde algunos elementos son iguales

Determinar la cantidad de trayectos en un diagrama de bloque

Explicar las limitaciones de las computadoras al resolver problemas grandes que envuelven los diagramas de bloque.



1. Usando todas las letras en la palabra *back* exactamente una vez, haz una lista de todos los arreglos posibles. Explica por qué tu lista está completa.
2. Sabemos de la sección anterior que la cantidad de arreglos de todas las letras en la palabra *computer*, usando cada letra una vez, es 8!. Explica.
3. Haz una lista de todos los arreglos diferentes usando todas las letras de la palabra *that*, donde cada letra es usada una vez. Explica por qué la respuesta no es 4!.

Aparece una complicación cuando tratamos de encontrar la cantidad de arreglos de todas las letras en una palabra tal como *selected*, usando cada letra una vez. El problema es que hay tres “e” en esta palabra. Uno está tentado a decir que hay 8! arreglos, pero, no todos estos arreglos serán diferentes. ¿Por qué? Observa algún arreglo para comenzar, digamos

ectedsel

Intercambia la letra “c” y la letra “e” en la cuarta posición para obtener un arreglo nuevo

eetcdsel

Sin embargo, si en nuestro arreglo inicial intercambiamos la primera “e” y la “e” en la cuarta posición, el arreglo nuevo sería

ectedsel

Pero, este es el mismo arreglo con el que comenzamos.

Si sólo estas “e” fueran diferentes (distintas), entonces, podríamos decir que la contestación es 8!.

Esto es, si tratamos de encontrar la cantidad de arreglos de todas las letras en la palabra $se_1le_2cte_3d$, usando cada letra una vez, la contestación es 8!.

Desafortunadamente, uno no escribe las palabras de esta manera. Para cada arreglo de las letras en la palabra $se_1le_2cte_3d$, tal como

$e_2cte_1dse_3l$

las e pueden ser arregladas como queramos, digamos

$e_3cte_2dse_1l$

pero, el resultado, en términos de los arreglos de la palabra *selected*, es el mismo arreglo. Hay 3! maneras de arreglar las tres “e”.

(¿Por qué?) Por consiguiente, hay $3!$ arreglos de más que han sido contados en la respuesta $8!$. Como resultado, la contestación correcta está dada por

$$\frac{8!}{3!}$$

Ahora, trátalo tú.

1. ¿Cuántos arreglos pueden hacerse usando todas las letras de la palabra *license*, donde cada letra es usada una vez?
2. ¿Cuántos arreglos pueden hacerse usando todas las letras de la palabra *initials*, donde cada letra es usada una vez?
3. El trabajo de arriba debería sugerir un patrón general. Completa la aseveración siguiente:
La cantidad de arreglos de N objetos, donde el orden es importante, cada objeto es usado una vez, y t de los objetos son iguales, está dada por _____.

¿Qué ocurre si tratamos de determinar cuántos arreglos se pueden hacer usando todas las letras en la palabra *different*? Hay nueve letras, pero, ya que hay dos “e” presentes, uno sabe que hay $2!$ arreglos de más en el número $9!$. Esto nos lleva al número

$$\frac{9!}{2!}$$

Sin embargo, hay también dos f presentes. Por consiguiente, el número $\frac{9!}{2!}$ es todavía $2!$ veces demasiado grande. La contestación final es

$$\frac{9!}{2! \cdot 2!}$$

Intenta los siguientes tres problemas:

1. ¿Cuántos arreglos se pueden hacer usando las letras de la palabra *letters*, donde cada letra es usada una vez?
2. ¿Cuántos arreglos se pueden hacer usando las letras de la palabra *arrangements*, donde cada letra es usada una vez?
3. ¿Cuántos arreglos se pueden hacer usando las letras de la palabra *Mississippi*, donde cada letra es usada una vez?

Efectivamente, se espera que el principio general siguiente tenga ahora sentido. La cantidad de arreglos de N objetos, donde el orden es importante, cada objeto es usado una vez, p de los objetos que son similares, q otros objetos que son similares, r otros objetos que son similares, ... , está dada por

$$\frac{N!}{p! \cdot q! \cdot r! \cdot \dots}$$

Los resultados del trabajo de arriba nos permiten completar nuestro objetivo. Recuerda, en un diagrama de bloque 10 H 10 (Figura 4.12), un trayecto es representado por un arreglo de estas 20 letras: 10 E y 10 N . El ejemplo que dimos antes fue

ENNENEENNENEENNENEEN

Cada trayecto puede ser representado por un arreglo de estas 20 letras, usando cada letra una vez. De nuestros resultados anteriores, hay

$$\frac{20!}{10! \cdot 10!}$$

o (usando una calculadora) 184,756 trayectos de A a B .

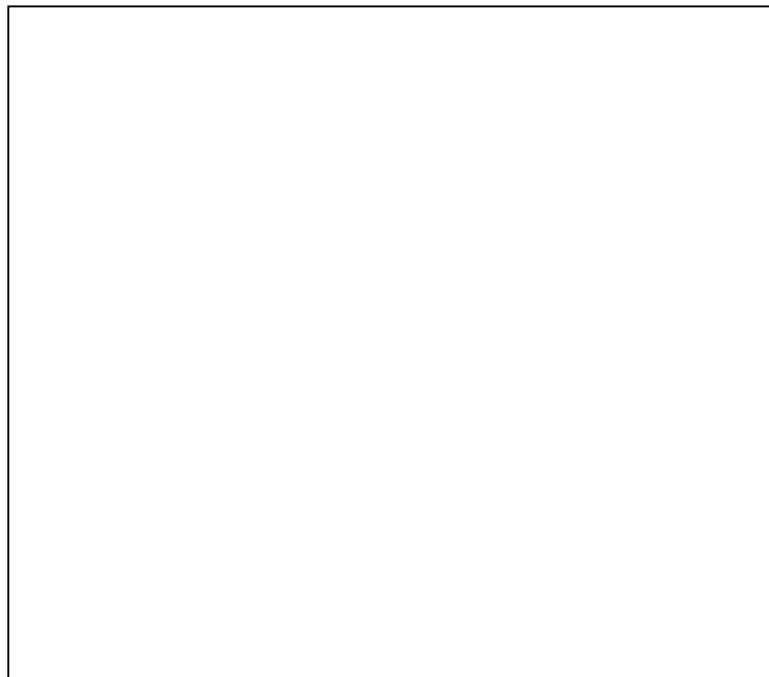
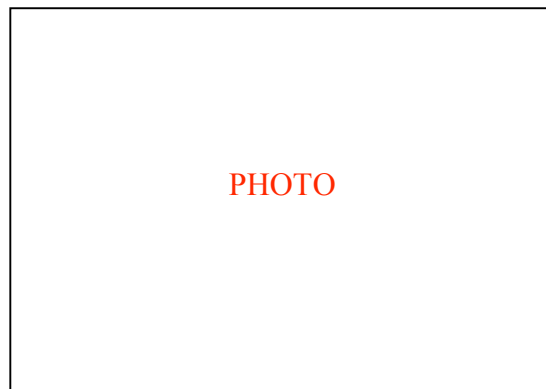


Figura 4.12

1. **¿Cuántas adiciones se necesitan para encontrar el tiempo requerido para un trayecto en un diagrama de bloque 10 H 10?**
2. **Si escribimos un programa de computadora para un diagrama de bloque 10 H 10 para encontrar el tiempo para cada uno de los trayectos posibles, ¿cuántas adiciones se necesitarían?**
3. **Tienes una computadora que puede llevar a cabo 100,000 adiciones por segundo. Acabas de escribir un programa de computadora para un diagrama de bloque 10 H 10, para encontrar el tiempo para cada trayecto posible. ¿Cuánto tiempo le tomará a la computadora correr este programa?**
4. **¿Cuántas adiciones se necesitan para encontrar el tiempo requerido para un trayecto de un diagrama de bloque 30 H 30?**
5. **Si escribimos un programa de computadora para un diagrama de bloque 30 H 30, para encontrar el tiempo para cada uno de los trayectos posibles, ¿cuántas adiciones se necesitarían?**
6. **Asume que tienes una computadora que puede llevar a cabo 100,000 adiciones por segundo. Tú acabas de escribir un programa de computadora para un diagrama de bloque 30 H 30 para encontrar el tiempo para cada uno de los trayectos posibles. ¿Cuánto tiempo le tomará a la computadora correr este programa?**

Las preguntas anteriores te deben dar alguna idea de las limitaciones de las computadoras. Un diagrama de bloque 30 H 30 no es un problema grande, aún, nuestras mejores computadoras, incluyendo los modelos más recientes, no pueden resolver este tipo de problema en un tiempo razonable. En el próximo capítulo veremos cómo las ideas nuevas en las matemáticas le permiten a las personas resolver dichos problemas en una fracción de segundo.



Conjunto de ejercicios: 4.3

1. (a) Llena la tabla siguiente en la Figura 4.13. Nota que parte del trabajo debe haber sido hecho mientras trabajaste esta sección. Además, asume que la computadora puede llevar a cabo 100,000 adiciones por segundo.

Tamaño del bloque	Cantidad de trayectos	Adiciones por trayecto	Cantidad total de adiciones	Tiempo para una computadora
				0.00018 seg.

Figura 4.13

- (b) Escribe un párrafo sobre cómo tú ves los números cambiando en la Figura 4.3 mientras cambia el tamaño del diagrama de bloque. ¿Hay un patrón?
2. Las ideas de las dos secciones anteriores se refieren no sólo a los diagramas de bloque cuadrados, pero, a otros tipos de diagramas, tales como los diagramas en bloques rectangulares en general. Por ejemplo, ¿cuántos trayectos hay de A a B en el diagrama de la Figura 4.14? Nuevamente, uno debe ir hacia “arriba” o hacia la “derecha” en cada esquina.



Figura 4.14

3. Un camión de bomberos localizado en la esquina de la 1^{ra}. Avenida y la Calle 1, necesita llegar a un fuego en la esquina de la 7^{ma}. Avenida y la Calle 9. El camión de bomberos hace el recorrido en un tiempo récord y no viaja más de 14 bloques (Figura 4.15). Hay N cantidad de rutas distintas que pudo haber tomado el camión de bomberos.

(a) Encuentra el valor numérico del íntegro N .

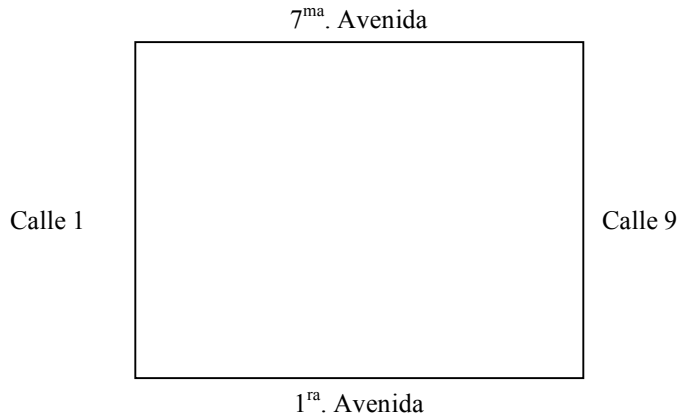


Figura 4.15

(b) ¿Cómo este problema difiere del problema 2?

4. En el diagrama de bloque de la Figura 4.16, Carmen vive en B y va a la escuela en A . Manejando de su casa a la escuela, ella hace una parada en C para coger gasolina. ¿Cuántas rutas diferentes Carmen podría tomar, asumiendo que en cada esquina del diagrama, ella, o va hacia arriba o va hacia la derecha?

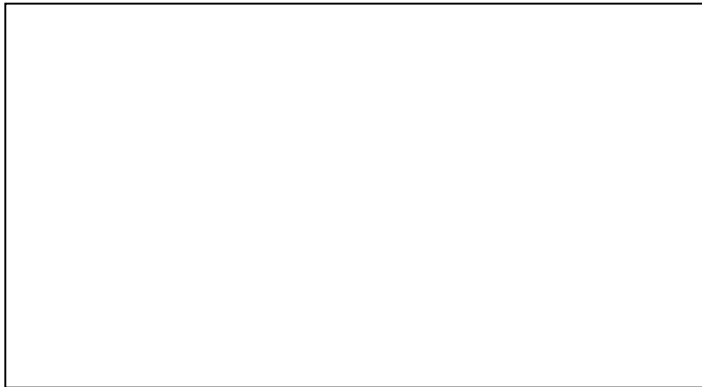
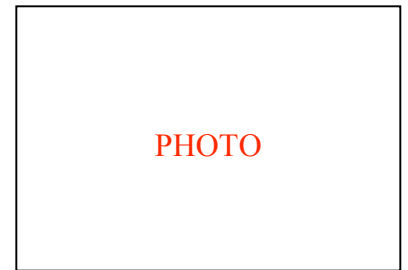


Figura 4.16



5. (a) Además de detenerse a coger gasolina en C (problema 4), Carmen decide, además, parar para comer algo en Doubleburger, localizado en D en la Figura 4.17. Bajo las reglas del problema anterior, ¿cuántas rutas diferentes podría tomar Carmen de la escuela a su casa?
- (b) En la Figura 4.17, ¿cuántos trayectos de A a B pasan a través de C ó D (posiblemente ambos)?

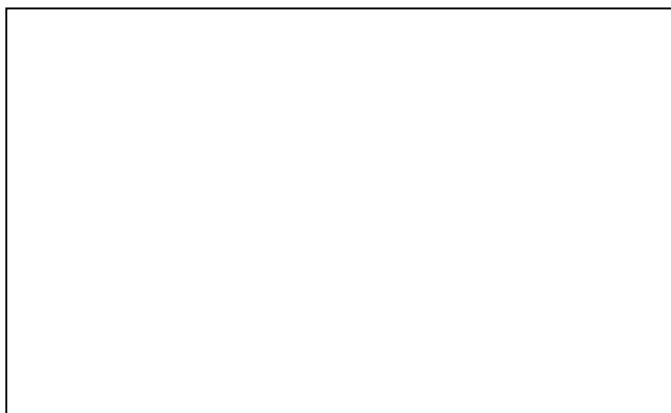


Figura 4.17

