4.4 Combinaciones: Estás fuera de orden

En varias de las últimas secciones hemos estado observando los arreglos, donde el orden, en algún sentido, era importante. *¿Cómo uno cuenta los arreglos donde el orden no es importante?* Como un ejemplo simple, observa los problemas A y B de abajo.

A. Del conjunto de 10 estudiantes {Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie}, se va a seleccionar un comité de tres personas para trabajar en las decoraciones para el Junior Prom de la escuela intermedia. ¿Cuántos comités diferentes de tres personas se pueden formar?

B. Del conjunto de 10 estudiantes {Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie}, se va a seleccionar a tres personas como oficiales de la clase junior. La primera persona seleccionada será presidente, la segunda será vicepresidente, y la tercera será secretaria (ninguna persona puede ocupar dos posiciones). ¿De cuántas maneras diferentes pueden ser seleccionados tres estudiantes como oficiales para la clase junior?

Debes saber que la contestación al problema B es $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas. Esto fue fácil, debido a que el orden era importante y pudiste usar herramientas que ya habían sido desarrolladas. Sin embargo, para contestar la pregunta en el problema A, no es tan fácil, ya que el orden en el cuál las personas son seleccionadas *no* es importante. A menudo se da el caso que el orden en el cuál las personas o cosas son seleccionadas no es importante. A continuación damos dos ejemplos:

1. Hay 2,000 televisores en un almacén. El encargado del almacén va a seleccionar una muestra de 30 de estos televisores para verificar posibles defectos. El orden de selección de los 30 televisores no es importante.

2. A los estudiantes de la clase de la Sra. Rayburn se le proveen 12 preguntas, y se les pide que contesten la mitad de estas. El orden en el cual estas seis preguntas seleccionadas se van a contestar no es importante.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Resolver problemas de conteo donde el orden no es importante

Definir que se quiere decir por una combinación de *N* objetos tomados *r* a la vez

Usar factoriales para enumerar las combinaciones

Usar combinaciones para resolver problemas que envuelven diagramas de bloque.

PHOTO

Describe dos otras situaciones donde el orden *no* es importante en un proceso de selección.

Volvamos al ejercicio anterior.

> Del conjunto de 10 estudiantes {Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie}, se va a seleccionar un comité de tres personas para trabajar en las decoraciones para el Junior Prom. ¿Cuántos comités diferentes de tres personas se pueden formar?

Si enumeramos las 10 personas como

Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie

entonces, la selección de tres personas puede ser hecha poniendo "bloques" alrededor de las personas seleccionadas y "tachando" los nombres de las personas que no se han seleccionado. Por ejemplo, asume que queremos seleccionar a Tom, Ana, y Barbara. Podrías indicar tus selecciones de la manera siguiente.

Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie SEE ENGLISH VERSION

Por otra parte, si quieres seleccionar a Mary, Harry, y Melissa, esa selección sería indicada por

Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie SEE ENGLISH VERSION

Efectivamente, cualquier selección de tres personas, donde el orden no es importante, puede ser indicada por tres bloques y siete *X*. Por ejemplo, la selección

$$XX{\sim}X{\sim}XXX{\sim}X$$

consistiría de Jane, Julie, y Barbara:

Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie SEE ENGLISH VERSION

Por consiguiente, cada selección de tres personas es especificada por un arreglo de siete *X* y tres ~. Sin embargo, la cantidad de dichos arreglos, de la sección anterior, es

$$\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

Esta es la cantidad de formas que se pueden seleccionar tres objetos de diez objetos, donde el orden en que se seleccionan los objetos (o personas) no es importante. También podemos hablar de este resultado como la cantidad de *combinaciones* de diez objetos seleccionadas tres a la vez.

Este número es escrito con frecuencia como ${}_{10}C_3$. Los símbolos ${}_nC_r$ se encuentran en muchas calculadoras.

Intenta ahora varios ejercicios. Usa una calculadora.

1. **¿De cuántas maneras puedes seleccionar cuatro personas de diez para servir en un comité de decoraciones para el Junior Prom: Mary, Tom, Jane, Jack, Julie, Ann, Harry, Melissa, Barbara, Marie?**
2. **Un vendedor maneja 12 marcas de camisas, pero, puede mostrar sólo siete marcas en una reunión de ventas. ¿De cuántas maneras pueden ser seleccionadas siete marcas?**

PHOTO

Una generalización de este proceso es la siguiente: considera un conjunto con N objetos distintos, digamos $\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_N\}$ Queremos contar todas las selecciones posibles de r de estos objetos, $0 \le r \le N$, donde el orden no es importante. Podríamos escribir una lista de las a como

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_N$$

Ahora coloca bloques (r cantidad) alrededor de los artículos que quieres seleccionar, y tacha los artículos que no quieres seleccionar. Este proceso es equivalente a escribir un arreglo de r bloques y $(N - r)$ X.

N objects = N objetos

¿Cómo explicarías a un amigo que debe haber $(N - r)$ X?

Del trabajo anterior sabemos que hay $\dfrac{N!}{r!(N-r)!}$ tales arreglos. Por consiguiente, esta es la cantidad de formas por la cual podemos seleccionar r cantidad de objetos de N cantidad de objetos, donde el orden de la selección no es importante.

En un ejemplo anterior queríamos saber la cantidad de formas que se podía escoger un comité de tres personas de un grupo de 10 estudiantes para trabajar en las decoraciones del Junior Prom. Aquí $N = 10$ y $r = 3$, de manera que $N - r = 7$. El resultado de arriba sostiene nuestra contestación anterior que fue

$$\frac{10!}{3!7!} = 120$$

Datos a conocer: La cantidad de **combinaciones** de N objetos tomadas r a la vez es

$$\frac{N!}{r!(N-r)!}$$

escrito a menudo como

$$_N C_r = \frac{N!}{r!(N-r)!}$$

Otra notación que es usada con frecuencia es $\binom{N}{r}$. Esto es,

$$\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$$

1. **Calcula $_{12}C_5$. Explica, en palabras, que significa el resultado.**

2. **Calcula $_{15}C_8$. Explica, en palabras, que significa el resultado.**

3. **¿Qué es $\binom{9}{9}$? Explica tu contestación de dos maneras −primero, usando una fórmula, y segundo, observando la cantidad de formas en la cual nueve objetos pueden ser seleccionados de nueve objetos.**

4. **¿Qué es $\binom{9}{0}$? Explica tu contestación de dos maneras −primero, usando una fórmula y segundo, observando la cantidad de maneras en la cual cero objetos pueden ser seleccionados de nueve objetos.**

5. **¿Qué es $\binom{N}{N}$? Explica tu contestación de dos formas −una vez, usando una fórmula, y luego, observando la cantidad de formas en la cual N objetos pueden ser seleccionados de N objetos.**

6. **¿Qué es $\binom{N}{0}$? Explica tu contestación de dos formas −primero, usando una fórmula y luego, observando la cantidad de maneras en la cual cero objetos pueden ser seleccionados de N objetos.**

7. **¿Cómo explicarías a otro estudiante que $_{12}C_8 = {}_{12}C_4$?**

8. **¿Cómo explicarías a otro estudiante que $_{N}C_r = {}_{N}C_{N-r}$?**

Este trabajo nos provee otra manera de contar la cantidad de trayectos en un diagrama de bloque. Recuerda el diagrama de bloque 4 H 4 de la Sección 1. (Figura 4.1).

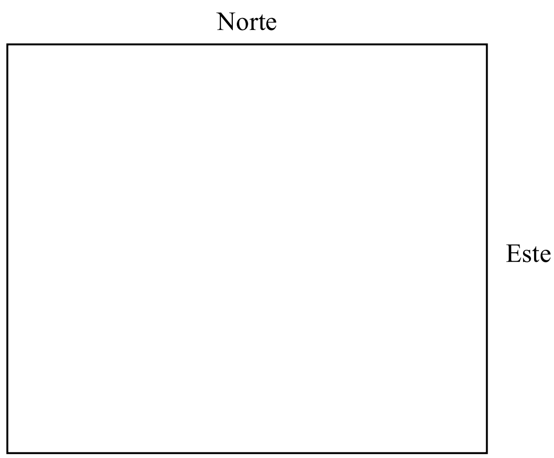

Figura 4.18

Un posible trayecto de *A* a *B* consistía de ocho letras: cuatro *E* y cuatro *N*. Por ejemplo,

EENENNNE

fue un posible trayecto. Para escribir un trayecto, es necesario llenar los ocho espacios.

(__ __ __ __ __ __ __ __)

Cuatro de los espacios deben contener una *E* y cuatro deben contener una *N*. Si seleccionamos cuatro espacios y ponemos una *N* en cada uno, entonces, cada espacio restante debe ser llenado con una *E*.

1. **¿De cuántas maneras puede uno seleccionar los cuatro espacios para una *N*?**

2. **Usando la misma idea, ¿cuántos trayectos hay en un diagrama de bloque 5 H 5?**

Uno necesita pensar cuidadosamente sobre el conteo de problemas. Algunas veces es necesario usar una combinación de varias herramientas, tales como el Principio fundamental del conteo, las Permutaciones, y las Combinaciones en la solución de problemas. Por ejemplo, asume que una clase de 30 estudiantes tiene 14 niños y 16 niñas. Se va a formar un comité de cinco estudiantes y debe consistir de dos niños y tres niñas. ¿Cuántos comités diferentes son posibles?

Para poder contestar esta pregunta, debemos pensar en la secuencia de acciones que deben ser tomadas.
Primera Acción: Selecciona los dos niños.
Segunda Acción: Selecciona las tres niñas.

La **Primera Acción** puede ser tomada en

$$\binom{14}{2} = 91 \text{ maneras}$$

Para cada una de estas maneras, la **Segunda Acción** puede ser tomada en

$$\binom{16}{3} = 560 \text{ maneras}$$

Por el Principio fundamental del conteo, dichas dos acciones pueden ser tomadas en

$$\binom{14}{2}\binom{16}{3} = 50{,}960 \text{ maneras}$$

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. **Se va a constituir un comité de empresarios compuesto de siete americanos y cuatro japoneses para discutir un acuerdo internacional de comercio. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto, si el comité debe incluir exactamente dos empresarios japoneses?**
2. **De 60 tubos de metal producidos por una máquina, $\frac{1}{6}$ son muy grandes, $\frac{1}{3}$ son muy pequeños y el resto cumplen con los límites de tolerancia (están bien). ¿De cuántas maneras puede uno seleccionar una muestra de 20 en la cual cinco son muy grandes, ocho son muy pequeños y siete cumplen con los límites de tolerancia?**

Algunas veces, tenemos que romper o *partir* un conjunto para poder aplicar nuestras herramientas de conteo. Por ejemplo, supongamos que un cargamento enviado a la Reisuko Music Store de 50 tocadores de MP3 contiene 40 que están en buenas condiciones y 10 que están defectuosos.

¿De cuántas maneras puede el supervisor seleccionar cinco de estos tocadores de música digital de manera que por lo menos, tres estén en buenas condiciones? (Preguntas como estas maneras son importantes para el “control de calidad”).

PHOTO

Si una muestra (o selección) de cinco tocadores de MP3 tiene por lo menos tres tocadores en buenas condiciones, entonces, la muestra contiene

exactamente tres buenos tocadores
o
exactamente cuatro buenos tocadores
o
exactamente cinco buenos tocadores.

Dicha clasificación divide todas esas muestras en tres subconjuntos, de manera que cada muestra pertenezca a un subconjunto y ninguno de dos subconjuntos tiene una muestra en común. Este proceso ilustra la idea de *partición* como es usada en el proceso de conteo.

Término a conocer: Hacer una **partición** de un conjunto significa dividir el conjunto en subconjuntos, de manera que cada elemento del conjunto le pertenece a uno y solamente un subconjunto.

Ahora, la cantidad de maneras en las cuales uno puede seleccionar cinco tocadores con exactamente tres en buenas condiciones, lo cual significa tener dos tocadores defectuosos, es

EQUATION

La cantidad de maneras en las cuales uno puede seleccionar cinco tocadores con exactamente cuatro en buenas condiciones, lo cual significa tener un tocador defectuoso, es

EQUATION

La cantidad de maneras en las cuales uno puede seleccionar cinco tocadores con exactamente cinco en buenas condiciones, lo cual significa tener ningún tocador defectuoso, es

EQUATION

La cantidad total de maneras en las cuales podemos seleccionar cinco tocadores con por lo menos tres tocadores en buenas condiciones está dada por

EQUATION

444,600 + 913,900 + 658,008 =
2,016,508

¡Explica por qué añadimos estos números juntos!

Conjunto de ejercicios: 4.4

1. Se va a constituir un comité de Derechos Humanos compuesto de ocho empresarios americanos y cuatro empresarios europeos.

(a) ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si el comité debe tener exactamente dos empresarios europeos?
(b) ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si el comité debe tener por lo menos dos empresarios europeos?

2. En un cargamento de 20 televisores para la United Appliance Store, hay siete televisores defectuosos. La tienda que está comprando los televisores tiene un "plan de muestreo". El plan consiste en observar una muestra de cuatro televisores y rechazar el cargamento completo si dos o más televisores en la muestra se encuentra que estén defectuosos. De otra manera, el cargamento será aceptado.

(a) ¿Cuántas muestras de cuatro televisores llevarán al rechazo?
(b) ¿Qué por ciento de la cantidad total de muestras posibles de cuatro televisores llevará al rechazo? (Nota: este tipo de actividad es algo realista, pero, la cantidad usada en este problema no sería considerada generalmente como "realista").

3. El territorio de ventas de la Wright Realty Company está dividido en 20 regiones. Estas regiones van a ser asignadas a cuatro vendedores de tal manera, que siete son asignadas al Vendedor 1, seis al Vendedor 2, cuatro al Vendedor 3, y tres al Vendedor 4. ¿Cuál es la cantidad total de maneras en la cuál las regiones pueden ser asignadas?

PHOTO

4. En un cargamento de 400 motocross, hay 110 defectuosas (pueden ser vendidas como artículos de "segunda") y 80 que están completamente defectuosas (no se pueden vender). ¿Cuántas muestras de siete artículos se pueden seleccionar las cuales

(a) contengan precisamente cuatro artículos de "segunda"?
(b) contengan precisamente "dos artículos de segunda" y precisamente tres artículos completamente defectuosos?

5. En un cargamento de 22 tocadores de CD para Recordo Music Store, hay cinco tocadores defectuosos. Se va a seleccionar una muestra de cuatro tocadores. El plan de muestreo consiste en rechazar el cargamento completo si dos o más tocadores en la muestra están defectuosos. De otra manera, el cargamento será aceptado. ¿Cuántas muestras posibles llevarán a la aprobación de dicho cargamento?

6. Elabora una pregunta que envuelva una situación del "mundo real" para la cual la contestación es ${}_{18}C_5$.

7. Elabora una pregunta que envuelva una situación del "mundo real" para la cual la contestación es

EQUATION

PROYECTO
Observa el "triángulo" de "combinaciones" de los símbolos de mecanografiar.

"TRIANGLE" OF "COMBINATION"

Evalúa cada símbolo para escribir de nuevo el triángulo usando números. El triángulo de arriba tiene cinco filas. Sin llevar a cabo ningunos cálculos, adivina las filas seis y siete. Enumera, entonces, tus conjeturas. Dicho triángulo se le conoce como el *Triángulo de Pascal* (lleva el nombre del matemático francés Blaise Pascal, el cual lo descubrió cerca del año 1650).

Las filas del Triángulo de Pascal están relacionadas a las expansiones de

$$(x+y)^0$$

$$(x+y)^1$$

$$(x+y)^2$$

$$(x+y)^3$$

$$(x+y)^4$$

etc.

Escribe un informe corto sobre las relaciones que ves entre el Triángulo de Pascal y estas expansiones.