4.6 Distribuciones binómicas: ¿Eres un éxito?

En esta sección, examinaremos las secuencias de los experimentos. Cada experimento tendrá uno de dos resultados posibles –un *éxito* o un *fracaso*. Es algo arbitrario el determinar a cuál de los dos resultados posibles se le llama un éxito y a cuál se le llama un fracaso.

Ejemplo 1: Un experimento consiste en tirar una moneda. Hay sólo dos resultados posibles –una cara o una cruz. Puedes llamar a una cara un éxito y a una cruz un fracaso.

PHOTO

Ejemplo 2: Un experimento envuelve observar a un recién nacido. Hay sólo dos resultados posibles –un varón o una hembra. Podemos llamar la hembra un éxito y al varón un fracaso. (Recuerda, en los varones, lo que se llama un éxito y lo que se llama un fracaso es algo arbitrario).

PHOTO

Ejemplo 3: Un experimento envuelve tirar un dado. Uno podría decir que un resultado de 1 ó 2 constituye un éxito, mientras 3, 4, 5, ó 6 constituyen un fracaso.

PHOTO

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Explicar la probabilidad de la distribución binómica

Construir representaciones gráficas de distribuciones binómicas

Relacionar las probabilidades con áreas de rectángulos.

Describe por lo menos otros tres experimentos que tienen exactamente dos resultados posibles.

Queremos observar una secuencia de dichos experimentos. Por ejemplo, podríamos tirar una moneda 30 ó 40 veces.

PHOTO

1. ¿Cuál tú piensas que es más probable que ocurra,

(a) 15 caras en 30 tiradas de una moneda, o
(b) 20 caras en 40 tiradas de una moneda? ¿Por qué?

Como otro ejemplo, podríamos observar familias con 5 hijos ó 7 hijos.

2. ¿Cuál tú piensas que es más probable que ocurra,

(a) 3 hijos varones en una familia con 7 hijos, o
(b) 2 hijos varones en una familia con 5 hijos? ¿Por qué?

Se asume que la secuencia de experimentos forma una **secuencia independiente**. Con esto queremos decir que la probabilidad de éxito o fracaso en cualquier experimento en la secuencia es independiente del resultado en cualquier experimento anterior en la secuencia. Una secuencia de experimentos del tipo descrito en el Ejemplo 1, el Ejemplo 2, y el Ejemplo 3, sería considerada una secuencia independiente. Por ejemplo, si tiras una moneda 40 veces, el resultado en la 37^{va} tirada es independiente del resultado en la 1^{ra} tirada, la 2^{da} tirada, la 3^{ra} tirada, ..., la 36^{va} tirada.

Para examinar tal secuencia más detenidamente, observemos familias con 5 hijos. Las probabilidades del nacimiento de un varón (M) y el nacimiento de una hembra (F) no son exactamente $\frac{1}{2}$. La proporción en sexo varía levemente de país a país. Hubo un tiempo, en los Estados Unidos, que, $P(\text{F}) = 0.47$ y $P(\text{M}) = 0.53$.

Preguntamos lo siguiente: en una familia con 5 hijos, ¿cuáles son las probabilidades que haya 0 hembras? ¿1 hembra? ¿2 hembras? ¿3 hembras? ¿4 hembras? y ¿5 hembras? ¡Esto es pedir mucho! Está bien, encontremos solamente la probabilidad de 2 hembras en una familia de 5 hijos. Una familia con exactamente 2 hembras puede ser denotada como

$$\text{MFMMF}$$

la cual es usada para indicar que el primer hijo nacido fue un varón, el segundo hembra, el tercero y cuarto varones, y el quinto hembra. Ya que la secuencia es independiente, uno puede usar la multiplicación de las probabilidades para obtener

$P(\text{MFMMF}) = (.53)(.47)(.53)(.53)(.47) = (.47)^2\,(.53)^3 = 0.0329$
(a cuatro lugares decimales)

Otra familia con exactamente 2 hembras puede ser denotada como

FMMMF

Nota que
$P(\text{FMMMF}) = (.47)(.53)(.53)(.53)(.47) = (.47)^2\,(.53)^3 = 0.0329$
(a cuatro lugares decimales)

Efectivamente, la probabilidad P de cualquier familia particular con exactamente dos hembras tendrá la misma probabilidad, a saber,

$$P = (.47)^2\,(.53)^3 = 0.0329$$

Aquí es donde nuestras técnicas de conteo juegan un papel importante. La pregunta es: ¿Cuántas familias de cinco puede uno describir, las cuales tengan precisamente dos hembras? Cualquiera de estas familias puede ser descrita por un arreglo de

FMMMF

PHOTO

Sabemos que hay

$$\frac{5!}{2!\,\cdot\,3!} = 10$$

arreglos de cinco letras que contienen 2 F y 3 M, cada una teniendo una probabilidad de $(.47)^2\,(.53)^3$. Recuerda que otra manera de mirar la cantidad de arreglos es la siguiente. Para cualquiera de estas familias, debes llenar los cinco espacios

— — — — —

con 2 F y 3 M. De los 5 espacios, selecciona 2 y pon las F. El resto de los espacios deben contener M. Los dos espacios para las F pueden ser seleccionados en

EQUATION

maneras, lo cual es la cantidad de arreglos. No importa cómo lo veas, tenemos $\binom{5}{2}$ arreglos, cada uno teniendo una probabilidad de $(.47)^2(.53)^3$. Resulta que en una familia de cinco, $P(\text{2 hembras}) = \binom{5}{2}(.47)^2\,(.53)^3 = 0.0329$ (a tres espacios decimales).

Usando $P(\text{F}) = 0.47$ y $P(\text{M}) = 0.53$, contesta las siguientes preguntas:

1. **En una familia de 5, ¿qué es $P(\text{3 hembras})$?**
2. **En una familia de 5, ¿qué es $P(\text{4 hembras})$?**
3. **En una familia de 7, ¿qué es $P(\text{3 hembras})$?**
4. **En una familia de 7, ¿qué es $P(\text{3 varones})$?**

Para formalizar el proceso anterior, observa una secuencia de N pruebas independientes donde en cualquier prueba

$$P(\text{éxito}) = p \text{ y } P(\text{fracaso}) = q = 1 - p$$

En el ejemplo de arriba, denominando a una hembra un éxito, $p = 0.47$ y $q = 0.53$. Para usar menos símbolos, escribe s para éxito y f para fracaso de manera que

$$P(s) = p \text{ y } P(f) = q$$

En N pruebas, la cantidad de éxitos podría ser cualquiera de los números X donde $X = 0, 1, 2, 3, 4, ..., N$. Estamos interesados en la probabilidad de exactamente k éxitos, donde $0 \leq k \leq N$. Esta probabilidad es escrita frecuentemente como $P(X = k)$. Una secuencia de resultados con exactamente k éxitos se parecería a esta.

k (cantidad de s) $(N - k)$(cantidad de f)

La probabilidad P de la secuencia particular de arriba estaría dada por:
$p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot ... \cdot p \cdot q \cdot q$

lo cual es igual a
$$p^k q^{N-k}.$$

Efectivamente, cualquier secuencia particular de k (cantidad de s) y $(N - k)$ (cantidad de f) tendrá una probabilidad de $p^k q^{N-k}$.

La pregunta ahora es: ¿Cuántas de estas secuencias hay? Hay N espacios para llenar. Seleccionamos k de los espacios los cuales llenamos con alguna cantidad de s. El resto debe ser llenado con alguna cantidad de f. Los espacios k para la cantidad de s puede ser llenado en $\binom{N}{k}$ maneras, la cual es la cantidad de arreglos con exactamente k cantidad de s. Resulta que la probabilidad de k éxitos en N pruebas, lo cual es denotado por $P(X = k)$, está dado por

EQUATION

La fórmula de arriba se conoce como la **probabilidad de distribución binómica**.

Como un ejemplo, supongamos que un dado neutral es lanzado cuatro veces. Se te pide que determines la probabilidad de obtener exactamente un 2 en las cuatro tiradas. Se obtiene una solución considerando un 2 como un éxito y un 1, 3, 4, 5 ó un 6 como un fracaso.

Usando $N = 4$ y $p = \frac{1}{6}$ (de manera que $q = \frac{5}{6}$, la probabilidad requerida está dada por $P(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.3858$ (a cuatro lugares decimales)

PHOTO

Ahora es tu turno para hacer el trabajo.

1. **Experiencias pasadas en Big Mac Book Store indican que el 30% de las personas que echan una ojeada en la tienda comprarán un libro. Ahora hay 10 personas echando una ojeada en la tienda. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 2 de estas personas comprarán un libro?**

2. **Se estima que una tercera parte de la población mundial tiene sangre tipo A^+. Si se toma una muestra al azar de 8 personas en tu clase, ¿cuál es la probabilidad que exactamente 4 de estas personas tienen sangre tipo A^+?**

3. **Experiencias pasadas indican que el 2% de los tocadores de CD construidos por Math Conn Disc Co. están defectuosos. Si se toma una muestra al azar de 20 tocadores, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga**

   (a) ningún tocador defectuoso?
   (b) exactamente 3 tocadores defectuosos?

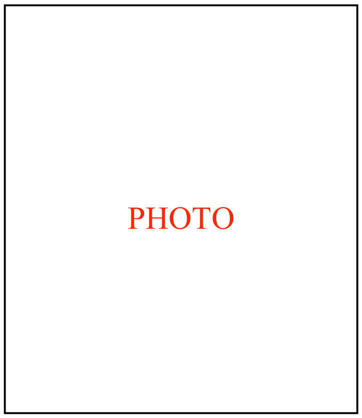
Regresa a dos de las preguntas que se te hicieron al principio de esta sección.

4. **¿Qué piensas es más probable que ocurra,**

   (a) exactamente 15 caras en 30 tiradas de una moneda, o
   (b) exactamente 20 caras en 40 tiradas de una moneda?
   Comienza adivinando la respuesta a la pregunta. Entonces, haz uso de la probabilidad de distribución binómica y una calculadora para obtener una respuesta precisa a esta pregunta.

5. **Asumiendo que es igualmente probable que nazcan niñas y niños, ¿qué piensas que es más probable que ocurra,**

   (a) 3 hijos varones en una familia con 7 hijos, o
   (b) 2 hijos varones en una familia con 5 hijos?
   Comienza adivinando la respuesta a esta pregunta. Entonces, haz uso de la probabilidad de distribución binómica y una calculadora para obtener una respuesta precisa a esta pregunta.



Puedes obtener una representación gráfica de las distribuciones binómicas como ilustra el siguiente ejemplo: Tira una moneda 3 veces y considera una cara como un éxito. En este caso, $N = 3$, y $p = \frac{1}{2}$. El conjunto S de posibles resultados (cantidad de éxitos) está dado por

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

Usando la distribución binómica, las probabilidades son

$$P(0) = \frac{1}{8} \qquad P(1) = \frac{3}{8} \qquad P(2) = \frac{3}{8} \qquad P(3) = \frac{1}{8}$$

¿Cuál es la suma de estas probabilidades?

Podríamos dibujar una gráfica de esta información como se ilustra en la Figura 4.21.

Probabilidad

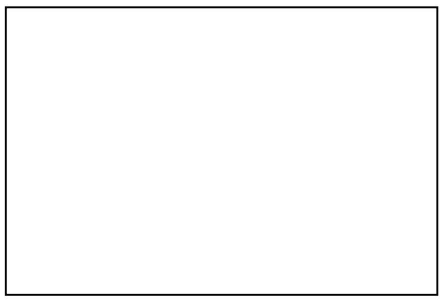


Figura 4.21

La Figura 4.21 ofrece una representación gráfica de una distribución binómica con $N = 3$ y $p = \frac{1}{2}$. Observa que si uno toma el ancho de cada rectángulo para que sea 1 unidad, entonces, el área de un rectángulo sobre una cantidad especificada de éxitos sería igual a la probabilidad de esa cantidad de éxitos. Por ejemplo, la probabilidad de 2 éxitos es el área de la región sombreada en la Figura 4.22.

Probabilidad

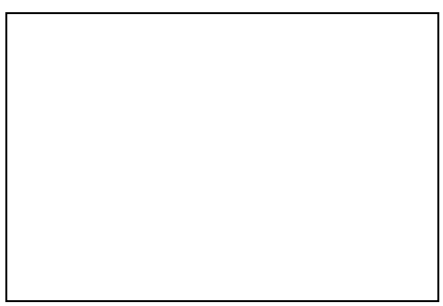


Figura 4.22

Usando la Figura 4.22

(a) Interpreta la probabilidad de tres sucesos como el área de un rectángulo.

(b) Interpreta la probabilidad de menos de dos sucesos como la suma de las áreas de los rectángulos.

1. **Dibuja una representación gráfica de una distribución binómica con $N = 4$ y $p = \frac{1}{2}$.**
2. **Dibuja una representación gráfica de una distribución binómica con $N = 3$ y $p = \frac{1}{3}$.**
3. **La Figura 4.23 ofrece una representación gráfica de una distribución binómica. ¿Qué es N y qué es p? Nota que los rectángulos sobre 0 y 10 son tan pequeños en altura que no son indicados. ¿Cuál debía ser la altura del rectángulo sobre 10?**

Figura 4.23

4. **La Figura 4.24 provee una representación gráfica de una distribución binómica con $N = 5$ y $p = \frac{1}{2}$.**

Figura 4.24

Si los rectángulos fueron dibujados de manera que el ancho de cada rectángulo es 1, entonces, el *área* de un rectángulo sobre una cantidad especificada de éxitos sería igual a la probabilidad de esa cantidad de éxitos. Por ejemplo, la probabilidad de 4 éxitos es el área del rectángulo sombreado en la Figura 4.25.

Figura 4.25

Usando la Figura 4.25

(a) Interpreta la probabilidad de dos sucesos como el área de un rectángulo.
(b) Interpreta la probabilidad de más de dos sucesos como la suma de las áreas de los rectángulos.

5. La Figura 4.26 provee una gráfica para una distribución binómica con $N = 10$ y $p = \frac{1}{2}$.

Figura 4.26

Toma el ancho de cada rectángulo para que sea 1 unidad. Usando áreas de rectángulos, encuentra la probabilidad que la cantidad de éxitos es entre 3 y 5, inclusive.

Esta relación entre la probabilidad y el área será una herramienta fundamental en secciones posteriores de este capítulo.

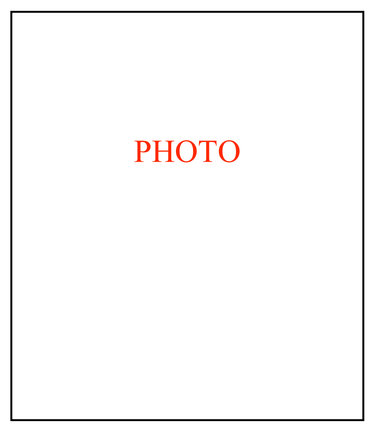
No olvides nuestro objetivo principal para lo que queda de este capítulo. Esto es, buscar ideas de cómo atender el siguiente problema.

> Experiencias anteriores indican que cerca de la mitad de las personas que contraen cierta enfermedad mueren de dicha enfermedad. A base de esta experiencia, las personas en el campo de la medicina asumen que la probabilidad de muerte por esta enfermedad es $\frac{1}{2}$. Una droga medicinal nueva le es administrada a 24 personas que tienen la enfermedad y sólo 4 mueren de dicha enfermedad, mientras 20 se recuperan. ¿Es la droga nueva una droga efectiva para combatir la enfermedad, o fue sólo el grupo particular (muestra) de 24 personas que respondieron de esta manera? ¿Cómo puede uno decidir si la droga nueva fue efectiva o no?
>
> **1.** ¿Piensas tú que la droga nueva es efectiva? ¿Por qué?
>
> **2.** Si a este grupo que se le administró la droga, 6 personas murieron de la enfermedad, ¿cambiarías tu manera de pensar sobre la efectividad de la droga? ¿Por qué?
>
> **Se te hicieron estas preguntas al comienzo de la Sección 5. ¿Has cambiado tu manera de pensar sobre tu respuesta? ¿Por qué? ¿Tienes ideas nuevas sobre cómo combatir este problema? ¿Cuáles ideas? ¿Ves alguna conexión entre este problema y la distribución binómica?**

Conjunto de ejercicios: 4.6

1. Una prueba de selección múltiple consiste de 10 preguntas. Para cada pregunta, 5 respuestas están dadas, de las cuáles exactamente 1 es correcta. Si un estudiante escoge al azar, entonces, ¿cuál es la probabilidad que
- **(a)** el estudiante obtenga exactamente 5 respuestas correctas?
- **(b)** el estudiante obtenga exactamente 9 respuestas correctas?

2. Una moneda neutral es lanzada 30 veces. ¿Cuál es la probabilidad que
- **(a)** ocurran exactamente 15 caras?
- **(b)** ocurra por lo menos una cara? (*Pista*: Observa el complemento).



3. Un estudiante, en una prueba de cierto y falso de 10 preguntas, contesta éstas adivinando. ¿Cuál es la probabilidad que el estudiante obtenga
- **(a)** correcto 100%?
- **(b)** exactamente 3 correctas?
- **(c)** por lo menos 1 correcta?

4. Si se lanza una moneda 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran exactamente 7 caras?

5. Una moneda neutral es lanzada 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad que por lo menos ocurra una cara?

6. En un lote grande de paneles de circuitos de computadora, 30% tienen circuitos defectuosos. Si se escogen 5 paneles de circuitos al azar del lote, encuentra la probabilidad que exactamente dos tengan circuitos defectuosos.

7. La tuberculosis afecta 1% de la población en cierto estado. Si se escogen 12 personas de ese estado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de las 12 personas tenga tuberculosis?

8. Una moneda es lanzada 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una cruz?

PHOTO

9. La probabilidad de que un paciente que se le ha hecho un transplante de hígado viva más de un año luego de la operación es 0.7. Dicho paciente es un éxito. Esta cifra está basada en datos del hospital MC. De cinco pacientes con transplante de hígado, ¿cuál es la probabilidad que

(a) exactamente 2 estén vivos un año después de la operación?
(b) todos estarán vivos un año después de la operación?
(c) por lo menos 4 estarán vivos un año después de la operación?

10. Un dado neutral numerado del 1 al 6 es lanzado cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos 6?

11. ¿Cuántas veces debe ser lanzada una moneda neutral para tener un 95% de certeza que se va a obtener por lo menos una cara?

12. Usando la p y q introducidas en esta sección, explica por qué

EQUATION
EQUATION

13. Dibuja una gráfica para una distribución binómica con $N = 5$ y $p = 0.4$.

14. Asumiendo que por cada nacimiento es igualmente probable que nazca un niño o un niña, ¿qué es más probable, por lo menos 1 niño en una familia de 3 hijos, o, por lo menos, 2 niños en una familia de 6 hijos? Explica.