4.7 Valor esperado de un experimento: ¿Qué esperas?

En el juego de Rock-Six, se lanza un dado. Ganas o pierdes puntos de acuerdo a las siguientes reglas:

(1) Si se obtiene un 1 ó 2, ganas 5 puntos.
(2) Si se obtiene un 3, 4, ó 5, pierdes 7 puntos.
(3) Si se obtiene un 6, ganas 10 puntos.

El dado será lanzado 60 veces y cada vez que es lanzado tú ganas o pierdes puntos de acuerdo a estas reglas. ¿Estarías dispuesto a jugar este juego? ¿Por qué?

En el juego de Solid-Six, se lanza un dado. Yo gano o pierdo puntos de acuerdo a las siguientes reglas:

(1) Si se obtiene un 1, 2, ó 3, gano 4 puntos.
(2) Si se obtiene un 4, ó 5, pierdo 6 puntos.
(3) Si se obtiene un 6, gano 8 puntos.

El dado se lanzará 120 veces, y cada vez que es lanzado, gano o pierdo puntos de acuerdo a estas reglas. Tengo que decidir si quiero jugar el juego o no. Yo razono de la siguiente manera. Veamos si estás de acuerdo.

En 120 tiradas, yo espero intuitivamente que se muestre un 1, 2, o tres cerca de $\frac{3}{6}$ ó $\frac{1}{2}$ del tiempo. Esto es, yo espero que cerca de 60 tiradas resulten en un 1, 2, ó 3. En cada una de estas 60 tiradas, yo gano 4 puntos. Nuevamente, en 120 tiradas yo espero intuitivamente que se muestre un 4 ó 5 cerca de $\frac{2}{6}$ ó $\frac{1}{3}$ del tiempo. Esto es, espero que 40 tiradas resulten en un 4 ó 5. En cada una de estas 40 tiradas, yo pierdo 6 puntos. Finalmente, en 120 tiradas, yo espero intuitivamente que se muestre un 6 cerca de $\frac{1}{6}$ del tiempo. Esto es, yo espero que resulte un 6 de cada 20 tiradas. En cada una de estas 20 tiradas, yo gano 8 puntos. Ahora, juntemos toda esta información. La cantidad total de puntos, E', que yo *espero* ganar (o perder) está dada por

$$E' = 60(4) + 40(-6) + 20(8) = 160 \text{ puntos}$$

¡Esto es muy bueno! ¡Yo quiero jugar este juego!

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Explicar la definición del valor esperado

Relacionar la idea del valor esperado a la idea del promedio

Resolver problemas usando el valor esperado de una distribución binómica.

PHOTO

Si jugué Solid-Six con 120 tiradas, ¿tú crees que

1. **ganaría exactamente 160 puntos? Explica.**
2. **es posible que perdiera puntos? Explica.**
3. **podría ganar más de 160 puntos? Explica.**

PHOTO

Observa nuevamente la cantidad de puntos (E') que espero ganar:

$$E' = 60(4) + 40(-6) + 20(8) = 160 \text{ puntos}$$

Recuerda, el dado fue lanzado 120 veces. La cantidad total de puntos que yo espero por tirada está dada por

$$\frac{160}{120} = \frac{4}{3} \text{ puntos por tirada}$$

Supongamos, que en mi juego el dado es lanzado 180 veces. Intuitivamente, yo esperaría ganar 4 puntos en 90 de las tiradas, perdería 6 puntos en 60 de las tiradas, y ganaría 8 puntos en 30 de las tiradas. La cantidad de puntos E' que yo espero ahora ganar (o perder) está dada por

$$E' = 90(4) + 60(-6) + 30(8) = 240$$

La cantidad de puntos por tirada que yo espero está dada por

$$\frac{240}{180} = \frac{4}{3} \text{ puntos por tirada}$$

Obviamente, la cantidad de puntos que yo espero, E', cambia cuando la cantidad de tiradas cambia. Sin embargo, la cantidad de puntos por tirada que yo espero no cambia. La razón para esto se puede ver observando los cómputos hechos en los dos casos examinados.

(1) 120 tiradas

$$\frac{E'}{120} = \frac{60}{120}(4) + \frac{40}{120}(-6) + \frac{20}{120}(8) = \frac{4}{3}$$

ó

$$\frac{E'}{120} = \frac{3}{6}(4) + \frac{2}{6}(-6) + \frac{1}{6}(8) = \frac{4}{3}$$

(2) 180 tiradas

$$\frac{E'}{180} = \frac{90}{180}(4) + \frac{60}{180}(-6) + \frac{30}{180}(8) = \frac{4}{3}$$

ó

$$\frac{E'}{180} = \frac{3}{6}(4) + \frac{2}{6}(-6) + \frac{1}{6}(8) = \frac{4}{3}$$

Observando los cómputos anteriores, podemos ver que la cantidad de tiradas no es importante si uno está observando la cantidad esperada de puntos por tirada. Los ingredientes esenciales son los resultados de los puntos 4, −6, y 8 juntos con sus respectivas probabilidades $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, y $\frac{1}{6}$. Estos ingredientes no dependen de la cantidad de tiradas. En cada caso tenemos

$$\frac{3}{6}(4)+\frac{2}{6}(-6)+\frac{1}{6}(8)=\frac{4}{3}$$

Podemos pensar en este juego de la siguiente manera: cada tirada en Solid-Six es un experimento con resultados en el espacio de muestra $\{4, -6, 8\}$. Las probabilidades están asignadas a los resultados por $P(4) = \frac{3}{6}$, $P(-6) = \frac{2}{6}$, y $P(8) = \frac{1}{6}$. Multiplicando los elementos del espacio de muestra por sus respectivas probabilidades, uno obtiene lo que se conoce como el **valor esperado del experimento**, el cual es denotado por E y dado por

$$E=\frac{3}{6}(4)+\frac{2}{6}(-6)+\frac{1}{6}(8)=\frac{4}{3}$$

1. Regresa al juego de Rock-Six al comienzo de esta sección.

Se lanza un dado. Ganas o pierdes puntos de acuerdo a las siguientes reglas.

(1) Si se obtiene un 1 ó 2, ganas 5 puntos.
(2) Si se obtiene un 3, 4, ó 5, pierdes 7 puntos.
(3) Si se obtiene un 6, ganas 10 puntos.

Se lanzará el dado 60 veces, y cada vez tú ganas o pierdes puntos de acuerdo a estas reglas.

(a) ¿Estarías dispuesto a jugar Rock-Six con 60 tiradas. ¿Por qué?
(b) Referente a cada tirada en Rock-Six como un experimento, ¿cuál es el valor esperado de este experimento?

PHOTO

2. Permite que el espacio de la muestra de un experimento sea el conjunto S = {35, 47, 59, 83} y permite que cada elemento de S tenga una probabilidad de $\frac{1}{4}$. Encuentra el valor esperado de este experimento multiplicando cada elemento de S por su respectiva probabilidad. ¿Dónde te has encontrado con este tipo de cálculo anteriormente?

Uno puede formalizar las ideas de arriba de la manera siguiente: permite que S sea una muestra de espacio la cual consiste del conjunto de resultados numéricos de un experimento, por ejemplo,

$$S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son las probabilidades respectivas para los resultados numéricos. Entonces, el valor esperado del experimento, denotado E, está dado por

$$E = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n$$

Finalizamos esta sección con algunos comentarios sobre esta noción de valor esperado. Considera el experimento de lanzar tres monedas y el conteo de la cantidad de caras. El resultado de cualquier tirada de las monedas podría ser 0, 1, 2, ó 3. Por consiguiente, la muestra del espacio para este experimento sería {0, 1, 2, 3} con las probabilidades respectivas $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. El valor esperado del experimento sería

$$E = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Esto significa que si lanzamos tres monedas 10 veces, hasta 100 veces, hasta 1000 veces, etc., entonces, la cantidad promedio de caras observadas por tirada debería ser $\frac{3}{2}$. No se debe llegar a ninguna conclusión sobre lo que ocurre si lanzamos tres monedas 1 vez.

Refiriéndonos de nuevo a las ideas de la sección anterior sobre la distribución de la probabilidad binómica, resuelve los siguientes problemas. Se lanza una moneda neutral; una cara se considera un éxito.

1. ¿Cuál es la cantidad esperada de éxitos si la moneda es lanzada
   (a) 2 veces?
   (b) 3 veces?
   (c) 4 veces?
   (d) 5 veces?

2. **¿Qué tú sospechas es la cantidad esperada de éxitos si la moneda es lanzada 50 veces?**
3. **¿Qué tú sospechas es la cantidad esperada de éxitos si la moneda es lanzada *N* veces?**
4. **Se lanza un dado. Un 1 ó un 2 son considerados un éxito. ¿Qué tú piensas es la cantidad esperada de éxitos si el dado es lanzado *N* veces?**

Las ideas en los problemas anteriores pueden ser formalizadas de la manera siguiente:

> Una actividad consiste de una secuencia de N experimentos independientes donde cada prueba tiene como resultado un éxito o un fracaso. La probabilidad de un éxito es p, y la probabilidad de un fracaso es $q = 1 - p$. Observamos la cantidad de éxitos. Un espacio de muestra S para esta actividad está dado por
>
> $$S = \{0, 1, 2, 3, ..., N\}$$

donde cada elemento representa una cantidad de posibles éxitos. De la sección anterior, las asignaciones de probabilidades están dadas por

EQUATION

Se puede probar que el valor esperado de esta actividad es $N \cdot p$. Esto es, la cantidad esperada de éxitos es $N \cdot p$.

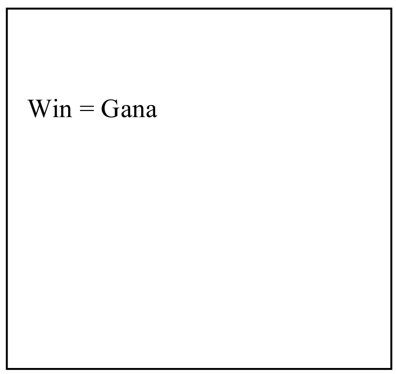
PHOTO

Conjunto de ejercicios: 4.7

1. Una caja contiene 2 pelotas negras y 1 pelota blanca. Las pelotas son retiradas de la caja sucesivamente sin reemplazarlas hasta que la pelota blanca es retirada. ¿Cuál es la cantidad esperada de retiros?

2. Las estadísticas indican que para un varón, la probabilidad de muerte entre las edades de 23 y 24 años es de 0.003. Si Angic Insurance Company ofrece una póliza de seguro de vida por un año de $10,000, por la cantidad de $80 para varones de estas edades, ¿cuánta es la ganancia que la compañía espera obtener por dicha póliza?

3. ¿Estarías dispuesto a pagar $1 en el carnaval Fireman para jugar el siguiente juego de la "ruleta"? ¿Por qué sí, o por qué no?



4. Una caja contiene 3 pelotas negras y 2 pelotas blancas. Las pelotas son retiradas de la caja sucesivamente, sin reemplazarlas, hasta que se obtiene una pelota negra. ¿Cuál es la cantidad esperada de retiradas requeridas?

5. Un cargamento de 12 tocadores de DVD es entregado a la DVD Superstore, la cual contiene 5 tocadores defectuosos. Se selecciona una muestra de 3 al azar (sin sustitución). ¿Cuál es la cantidad esperada de tocadores defectuosos en la muestra?

6. Takashi desea comprar una póliza de seguro de vida por 10 años que pagará al beneficiario $50,000 en caso de muerte durante los próximos 10 años. Se determina, de las tablas de seguro de vida, que la probabilidad de que él viva 10 años más es de 0.95. ¿Cuál es la cantidad más pequeña (mínimo) que él puede esperar pagar por dicha póliza?

7. En un cargamento de 4 televisores entregados a Super Joe, 1 televisor está defectuoso. Los televisores son examinados sucesivamente hasta que se encuentra el televisor defectuoso. ¿Cuál es la cantidad esperada de televisores a ser examinados?

8. Marie compró una póliza de seguro de vida de $20,000 de un término de un año por la cantidad de $210. Asumiendo que la probabilidad de que ella viva otro año sea de 0.995, encuentra la ganancia esperada por la compañía.

9. Una moneda neutral es lanzada dos veces. ¿Cuál es la cantidad esperada de caras?

10. La Antea Insurance Company cobra una prima de $1,500 para una póliza de seguro de accidentes por un año. Si el poseedor de la póliza tiene un accidente grande durante el año, la compañía pagará $50,000; por un accidente menor, pagará $10,000. La compañía no devuelve la prima de $1,500. El poseedor de la póliza es un conductor precavido que la probabilidad de que tenga más de un accidente al año es tomada como 0. La probabilidad de que tenga un accidente menor es de 0.08 y la probabilidad que tenga un accidente grande es de 0.005. ¿Cuál es el valor esperado de la póliza de seguro para la compañía?

PHOTO

11. **(a)** El espacio de muestra de un experimento es el conjunto

$$\{2, 5, 6, 7, 16\}$$

con probabilidades dadas por

$$P(2) = \frac{1}{7},\ P(5) = \frac{1}{7},\ P(6) = \frac{1}{7},\ P(7) = \frac{2}{7},\ P(16) = \frac{1}{7}$$

Encuentra el valor esperado de E de este experimento.

(b) Encuentra el valor medio (promedio) del conjunto de datos

$$2, 5, 6, 6, 7, 7, 16$$

(c) Compara los resultados de (a) y (b). Explica.

12. En 50 tiradas de un dado numerado del 1 al 6, ¿cuál es la cantidad esperada de 5?

13. Una prueba de selección múltiple contiene 100 preguntas, cada pregunta tiene 5 respuestas disponibles, donde una y sólo una es correcta.

(a) Si un estudiante simplemente adivina las respuestas, ¿cuántas preguntas esperas que este estudiante adivine correctamente?

(b) ¿Qué nota debe esperar este estudiante si todas las preguntas tienen el mismo peso?