4.8 Curvas normales

Repaso y resumen: Una experiencia pasada indica que Jack Michaelson, un jugador de baloncesto, logra una mitad de sus intentos de tiros de campo. En sus próximos tres tiros, él podría lograr 0, 1, 2, ó 3 tiros de campo. Uno podría hacer aseveraciones similares sobre sus próximos 5 ó 10 tiros. En la sección 4.6, observaste cómo las gráficas para las distribuciones binómicas podían ser usadas para representar las probabilidades de dichos eventos. Las gráficas para las distribuciones binómicas con $N = 3$, 5 y 10, todas con $p = 0.5$, están dadas en la Figura 4.27.

Figura 4.27

PHOTO

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Enumerar propiedades importantes de una curva normal

Relacionar la curva normal a probabilidades binómicas

Usar la curva normal para computar probabilidades

Relacionar probabilidades a áreas bajo una curva

Aproximar probabilidades binómicas usando probabilidades normales.

En la Figura 4.28 está dada una gráfica para una distribución binómica con $N = 20$ y $p = 0.3$. Nota que para una k (la cantidad de éxitos) mayor que 13, la probabilidad es tan pequeña que no es razonable dibujar un rectángulo en la gráfica.

Figura 4.28

Históricamente, una gran parte del pensamiento matemático ha consistido en dibujar curvas suaves para aproximar gráficas que uno generalmente no consideraría suaves. La Figura 4.29 ilustra una curva "suave" que aproxima una gráfica de una distribución binómica con $N = 12$, y $p = \frac{1}{3}$.

Figura 4.29

Abraham de Moivre, un matemático inglés de origen francés, fue quien, en 1733, encontró una función $f(x)$ que tiene una curva suave para una gráfica que puede ser usada para aproximar una distribución binómica. Efectivamente, él probó que mientras N se torna más y más grande, una distribución binómica se acerca más y más a su $f(x)$. El $f(x)$ encontrado por de Moivre, llamada la **Función de Probabilidad Normal**, es una función de "apariencia fea" dada por:

EQUATION **(1)**

¡Esto es suficiente para asustar a cualquiera. Terminemos esto y vayámonos a casa! No temas nunca. ¡No te preocupes! Nunca, nunca, nunca, usaremos esta fórmula. Sin embargo, haremos uso de cinco propiedades notables que la gráfica de $f(x)$ posee.

Propiedad (1) El "patito feo" en (1) tiene dos números sin especificar, μ y σ. La letra griega μ es pronunciada "mi" y la letra griega σ es pronunciada "sigma". El número μ puede ser tomado como siendo cualquier número real y es conocido como la *media* de $f(x)$. El número σ puede ser tomado como siendo cualquier número real positivo y se le conoce como la *desviación estándar* de $f(x)$. Ya que, dentro de estas líneas guías, uno puede cambiar los números μ y σ, la fórmula en (1) representa muchas funciones (justamente como $y = ax + b$ es usada para representar muchas líneas rectas). Sin embargo, no importa cuál μ y σ escojas, la gráfica lucirá similar a la de la Figura 4.30.

Figura 4.30

Dicha gráfica es usualmente llamada ya sea una *curva normal* o una *curva en forma de campana*. Nota que la gráfica está siempre sobre el eje de x.

Propiedad (2) No importa cuál valor es escogido para σ, la gráfica de la Propiedad (1) será simétrica sobre la línea $x = \mu$ (Figura 4.31).

Figura 4.31

Propiedad (3) El número σ es relacionado a cómo la curva es extendida sobre el eje de x alrededor de $x = \mu$. Por esta razón, uno usualmente piensa en σ como medido en el eje de x de $x = \mu$. Un valor pequeño de σ provee una gráfica que tiende a abultarse alrededor de $x = \mu$. Un valor grande de σ provee una gráfica que luce como si fuera estirada en ambos lados de $x = \mu$. La Figura 4.32 ilustra estas ideas. La Figura 4.32 incluye además una gráfica de dos curvas normales teniendo medias diferentes, pero, la misma desviación estándar.

Media igual – desviación estándar diferente

Medias diferentes – desviación estándar igual

Figura 4.32

En la Figura 4.33 hay gráficas de dos curvas normales con la misma media. Una tiene una desviación estándar de 1.2, y la otra tiene una desviación estándar de 1.9. ¿Cuál tiene una desviación estándar de 1.2? Explica.

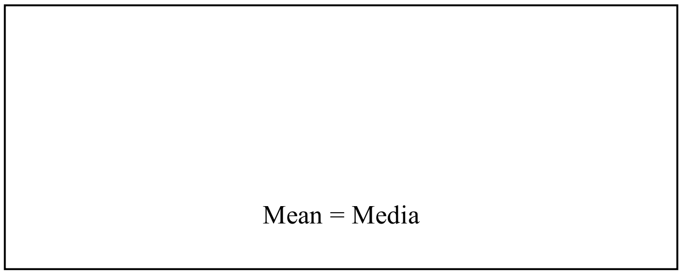

Figura 4.33

Al comienzo de **MATH** *Connections* fuiste introducido al concepto de desviación estándar de un conjunto de datos como una medida de extensión. El σ asociado con $f(x)$, el cual hemos llamado la desviación estándar de $f(x)$, se comporta de una manera similar a una medida de extensión.

Propiedad (4) Para cualesquiera alternativas de μ y σ, el área total entre una curva normal y el eje de x es 1 (Figura 4.34).

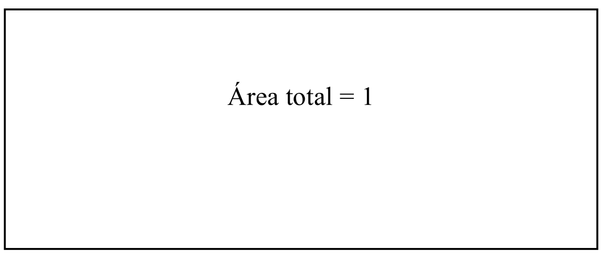

Figura 4.34

1. **Una curva normal tiene una media de $\mu = 5$ y una desviación estándar de $\sigma = 0.48$. ¿Cuál es el área entre la curva y el eje de x sobre el rayo $x \leq 5$?**

2. **Una curva normal tiene una media de $\mu = 7.05$ y una desviación estándar de $\sigma = 0.82$. ¿Cuál es el área entre la curva y el eje de x sobre el rayo $x \geq 7.05$?**

Propiedad (5)

(a) El área bajo una curva normal entre $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$ se ha encontrado que es aproximadamente 0.68 (Figura 4.35).

Area = Área

Figura 4.35

(b) El área bajo una curva normal entre $x = \mu - 2\sigma$ y $x = \mu + 2\sigma$ se ha encontrado que es aproximadamente 0.95 (Figura 4.36).

Area = Área

Figura 4.36

(c) El área bajo una curva normal entre $x = \mu - 3\sigma$ y $x = \mu + 3\sigma$ se ha encontrado que es aproximadamente 0.997 (Figura 4.37). ¡Caramba! Eso es cercano a 1.

Area = Área

Figura 4.37

1. **Para una curva normal con $\mu = 4.15$ y $\sigma = 2$, ¿cuál es el área (aproximada) bajo la curva de $x = 4.15$ a $x = 6.15$?**

2. **Para una curva normal con $\mu = 1.2$ y $\sigma = 1$, ¿cuál es el área (aproximada) bajo la curva de $x = -0.8$ a $x = 2.2$?**

3. **Para una curva normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 2$, ¿cuál es el área (aproximada) bajo la curva sobre el rayo $x \leq -6$?**

4. **Para una curva normal con $\mu = 3.59$ y $\sigma = 1$, ¿cuál es el área (aproximada) bajo la curva sobre el rayo $x \geq 4.59$?**

Hemos visto ahora cinco propiedades de la función de probabilidad normal. Para nuestros propósitos, la **Propiedad (5)** es la más útil.

Recuerda que en la sección anterior fuimos capaces de representar las probabilidades desde una distribución binómica como áreas de rectángulos. Estamos ahora aproximando las distribuciones binómicas por curvas normales. La Figura 4.38 ilustra esto para una distribución binómica con $N = 20$ y $p = 0.5$.

Figura 4.38

Uno debe esperar que es posible ahora aproximar las áreas en rectángulos usando el área bajo una curva normal (Figura 4.39).

Figura 4.39

Dichas áreas han sido calculadas y están disponibles para nuestro uso.

Al usar una curva normal, uno pregunta solamente por la probabilidad que un resultado X esté en un intervalo $a \leq X \leq b$. Por consiguiente, en la Figura 4.40, el área bajo la curva de $x = a$ a $x = b$ representa la probabilidad que el resultado X de un experimento radica en el intervalo en el eje de x dado que $a \leq x \leq b$. Esto es,

$P(a \leq X \leq b)$ = Área bajo la curva de $x = a$ a $x = b$, inclusive.

Área = $P(a \leq X \leq b)$

Figura 4.40

Nuestras preguntas previas sobre el área bajo una curva normal pueden ser traducidas en preguntas sobre probabilidades. Contestando las siguientes preguntas, haz uso de las aproximaciones dadas anteriormente en el área debajo las partes de una curva normal.

1. Una curva normal tiene una media $\mu = 90$ y una desviación estándar $\sigma = 15$.

(a) ¿Qué es $P(75 \leq X \leq 120$?

(b) ¿Qué es $P(X \leq 120)$?

2. La vida promedio de unos tenis (zapatos deportivos) Mikee sigue una curva normal con una media de 50 semanas y una desviación estándar de 8 semanas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que los tenis Mikee nuevos de Jason se desgasten en algún momento entre las 58 y 66 semanas después de haberlos comprado?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que los tenis Mikee nuevos de Carmen duren más de 66 semanas?

Un problema importante permanece. Uno puede ver en una fotografía o gráfica cómo una curva normal se aproxima a una distribución binómica. Sin embargo, hay muchas curvas normales (diferente μ, diferente σ) y muchas distribuciones binómicas (diferente N, diferente p). ¿Cómo éstas están relacionadas? Por ejemplo, la Figura 4.41 ilustra una curva normal usada para aproximar una distribución binómica con $N = 12$ y $p = \frac{1}{3}$.

Figura 4.41

El problema es determinar una μ y σ para la curva normal en la Figura 4.41. Aquí es donde descansamos en el trabajo de de Moivre. Él encontró que la "mejor" curva normal para una distribución binómica de N pruebas y una probabilidad de p éxitos, fue obtenida tomando μ como el valor esperado Np de la distribución y tomando σ como siendo $\sqrt{Np(1-p)}$. Resulta que en la Figura 4.41, la curva normal debe tener $\mu = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ y una desviación estándar $\sigma =$ $\sqrt{12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 1.633$ (llevado a tres lugares decimales).

¡Ahora inténtalo tú! En la Figura 4.42, una curva normal es usada para aproximar una distribución binómica con $N = 20$ y $p = \frac{1}{2}$. Para la curva normal, ¿cuáles son los valores de μ y σ?

Figura 4.42

Finalizamos esta sección con dos observaciones adicionales. Nota que haremos uso de estas observaciones en la próxima sección.

Observación (1) Sabemos que para una curva normal (Figura 4.43):

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$ (llevado a tres lugares decimales).

Área = 0.997

Figura 4.43

Efectivamente, el área bajo una curva normal sobre el rayo $x \geq \mu + 3\sigma$ es 0.001 llevado a 3 lugares decimales (Figura 4.44).

Área = 0.001

Figura 4.44

Un resultado X de un experimento, donde $X \geq \mu + 3\sigma$ es considerado como *muy poco probable*.

Observación (2) Sabemos que el área bajo una curva normal sobre el intervalo de $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$ es igual a 0.9544 (Figura 4.45).

Área = 0.9544

Figura 4.45

Para llevar esta área más cercana a 0.95 ó 95%, uno usa el intervalo $\mu - 1.96\sigma$ a $\mu + 1.96\sigma$ como mostrado en la Figura 4.46.

Área = 0.95

Figura 4.46

Conjunto de ejercicios: 4.8

1. Una distribución binómica tiene $N = 300$ y $p = \frac{1}{4}$. Si una curva normal va a aproximarse a esta distribución binómica, ¿qué serían μ y σ?

2. En un lote grande de paneles de circuito, 25% tienen un circuito roto. Se selecciona una muestra de 300 paneles al azar. Considera un examen de cada panel con un circuito roto en la muestra como una secuencia independiente de experimentos. Usando una aproximación normal a una distribución binómica, estima la probabilidad que por lo menos 60 paneles en la muestra tengan un circuito roto. (*Pista*: Observa el problema 1).

PHOTO

3. Una distribución binómica tiene $N = 400$ y $p = 0.5$. Si una curva normal va a aproximarse a esta distribución binómica, ¿qué serían μ y σ?

4. En una ciudad grande, 50% de los votantes son republicanos registrados. Se selecciona una muestra al azar de 400 votantes. Piensa en encontrar el registro de los votantes en la muestra como una secuencia independiente de experimentos. Usando una aproximación normal a una distribución binómica, estima la probabilidad de que no más de 180 de éstos en la muestra son republicanos registrados.

5. Regresa al problema que ha sido un foco durante varias secciones pasadas.

Las experiencias pasadas indican que cerca de la mitad de las personas que contraen cierta enfermedad mueren de dicha enfermedad. Basado en este experimento, las personas en el campo de la medicina asumen que la probabilidad de muerte por esta enfermedad es $\frac{1}{2}$. Una droga medicinal nueva le es suministrada a 24 personas que padecen la enfermedad, y sólo 4 mueren de ella, mientras 20 se recuperan.

¿Es la droga nueva una droga efectiva para combatir la enfermedad, o fue solamente el grupo particular (muestra) de 24 personas que respondieron de esta manera? ¿Cómo debe uno decidir si la droga fue efectiva o no?

Se te hicieron anteriormente las siguientes preguntas:

(a) ¿Piensas que la droga nueva es efectiva? ¿Por qué?
(b) Si, en este grupo de 24 personas que se le administró la droga, 6 personas murieron de la enfermedad, ¿cambiarías de parecer sobre la efectividad de la droga? ¿Por qué?

PHOTO

En un punto u otro durante este capítulo, debiste haber tenido opiniones reflejadas en tus respuestas a estas preguntas. ¿Has aprendido algo nuevo que tú crees puede ser utilizado al contestar estas preguntas, o sostengan respuestas que hayas dado ya? ¿Observas alguna conexión entre este problema, la distribución binómica, y una curva normal? Explica.

6. He aquí otro problema que consideramos anteriormente.

Tienes una moneda que tú piensas es neutral, pero, no estás seguro. Esto es, tú piensas que si se lanza la moneda, la probabilidad de obtener cara es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de obtener cruz es $\frac{1}{2}$.

Si la moneda se lanza muchas, muchas veces, entonces, las caras y las cruces deben aparecer con alrededor de la misma frecuencia. Sin embargo, no estás seguro de que esto ocurra. Esto es, no estás seguro de que esta es una moneda neutral. Lanzas la moneda 24 veces y solamente aparecen 4 caras. A base de este experimento, ¿cómo decides si ésta es una moneda neutral o no?

(a) ¿Piensas que la moneda es neutral? ¿Por qué?

(b) Si obtienes exactamente 6 caras, tirando la moneda 24 veces,¿cambiarías de parecer sobre la imparcialidad de la moneda?

Nuevamente, en un punto u otro durante este capítulo, tuviste opiniones reflejadas en tus respuestas a estas preguntas. ¿Has aprendido algo nuevo que crees puede ser usado para contestar estas preguntas, o sostengan las respuestas que has dado ya? ¿Ves alguna conexión entre este problema, la distribución binómica, y una curva normal? Explica.