

Las funciones algebraicas

Capítulo 1

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Comprender la definición de una función

Reconocer funciones lineales y no lineales

Manifestar el dominio y alcance de una función

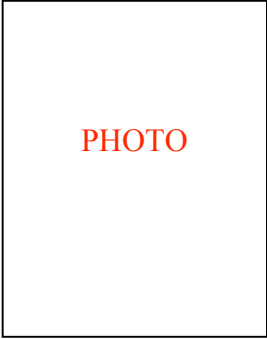
Entender el uso de un modelo matemático de una situación de la vida real.

1.1 Revisión de las funciones

Hay muchos tipos de relaciones diferentes que podemos tener con las personas: aquellas con la familia, amigos, primos, tíos y tías. Cada relación tiene ciertas características que la hace única. Las matemáticas son también a base de relaciones y al igual que la vida real, algunas son más interesantes que otras. En este capítulo, examinarás una cantidad de relaciones matemáticas y establecerás por qué algunas son más matemáticamente interesantes que otras.

El comité de anuario de la escuela Grand Ridge está haciendo planes para la edición del anuario del próximo año. El tesorero, Jeff, quien ha comenzado a reunirse con el representante de la casa editora, le presenta un informe al resto del comité. “El vendedor dice que si ordenamos 500 libros, el costo total será \$17,500; si ordenamos 1000 libros, el costo total será \$25,000; y si ordenamos 2000 libros, el costo total será \$40,000”.

PHOTO



Jolene es la gerente de ventas. Ella pregunta, “Pero que tal si queremos ordenar una cantidad diferente de libros. ¿Cuánto nos costarían digamos, 750 libros?”.



1. La figura 1.1 muestra una gráfica del costo total (y) versus la cantidad de anuarios (x) usando los tres conjuntos de precios que el representante de ventas le dio a Jeff. ¿Qué parece ser cierto acerca de estos tres puntos?



Figura 1.1



2. Establece una ecuación que relacione el costo total a la cantidad de anuarios ordenados.
3. Las líneas entrecortadas en la Figura 1.1 parecen indicar que si la escuela no ordena anuarios, incurrirá de todas formas en un costo de \$10,000. ¿Es esto correcto? Explica.

Recuerda que la ecuación de una línea recta que no es vertical (pendiente es indefinida) es dada por $y = mx + b$ donde m es la pendiente y b es la intersección de y . La intersección de y , el lugar donde la gráfica interseca el eje de y , es 10,000 en este caso. La pendiente puede ser calculada del radio

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

entre cualquier dos puntos. Usando los puntos (1000, 25,000) y (2000, 40,000) provee una pendiente de

$$\frac{40,000 - 25,000}{2000 - 1000} = \frac{15,000}{1000} = 15$$

Así, en este caso la ecuación de la línea es $y = 15x + 10,000$ donde y representa el costo total y x representa la cantidad de anuarios ordenados.

Ahora Jolene puede calcular el costo total para cualquier cantidad de anuarios. Esta ecuación representa un modelo matemático de la relación entre el costo total de los anuarios y la cantidad de anuarios ordenados por la escuela.



1. **Usa la fórmula anterior para calcular el costo total de**
 - (a) 200 anuarios
 - (b) 750 anuarios
 - (c) 1250 anuarios
2. **¿Puedes calcular el valor para y si x es 150.5? Si puedes, hazlo. Si no, explica por qué no.**
3. **¿Puedes calcular el valor para y si x es -200? Si puedes, hazlo. Si no, explica por qué no.**

Con frecuencia hay una diferencia entre lo que hace sentido matemáticamente y lo que hace sentido en la realidad. La ecuación hace sentido matemático para cualquier valor de x que queremos usar. Sin embargo, la interpretación que le hemos dado a x como la cantidad de anuarios, significa que x debe ser un número entero. Los pares ordenados que satisfacen la relación $y = 15x + 10,000$ forman una **función**. Recuerda que la función es un conjunto de pares ordenados donde no hay dos pares ordenados que tengan el mismo valor de x y diferentes valores de y . Esto es, dos cantidades diferentes de anuarios tendrán dos costos diferentes.

Esto también significa que una línea vertical puede intersecar solamente la línea $y = 15x + 10,000$ una sola vez. Nota que este es el caso para la función del costo de nuestro anuario. Recuerda que el conjunto de posibles valores de x para una función se llama el **dominio**. El conjunto de posibles valores de y para una función se llama el **alcance**. Si queremos que la relación sea un modelo preciso para el costo de los anuarios, entonces podríamos restringir el dominio para que sea, por ejemplo, un conjunto de $D = \{100, 150, 200, \dots\}$. El alcance sería entonces el conjunto

$$R = \{11,500, 12,250, 13,000, \dots\}$$

Esta es la razón de que la línea está entrecortada en la Figura 1.1. Otras aplicaciones podrían permitirnos usar cualquier valor real para el dominio, el cual cambiará también los valores por el alcance.

En las reuniones del comité de anuario, ha surgido otro problema. Jolene dice, “Esto es grandioso, podemos calcular cuánto nos costará cualquier cantidad de anuarios. El problema es que no sabemos cuántos ordenar porque no sabemos cuántos podremos vender”.

A este punto José dice, “Tengo las cantidades de ventas de los últimos 10 años, y al parecer la cantidad de anuarios que se vendieron dependió del precio de los anuarios”.



1. **José le presenta al comité los números de la cantidad de anuarios vendidos y el precio correspondiente. Estos números se muestran abajo. Haz una gráfica del precio (x) versus la cantidad de anuarios vendidos (y).**
2. **¿Es la cantidad de anuarios vendidos una función del precio? Si es así, encuentra la ecuación que relaciona la cantidad vendida al precio. Si no es así, explica por qué no.**
3. **Si el precio de los anuarios fuera \$40, ¿cuántos tú crees que serán vendidos?**

Precio \$										
Cantidad vendida										

Figura 1.2

José notó una ley fundamental de la economía. Si el precio aumenta, las ventas bajan, y si el precio baja, las ventas aumentan. En esta situación notamos que 1000 libros se venderán a \$30 cada uno y que cada \$1 que reduzcamos resultará en la venta de 10 anuarios más. Por cada \$1 que se aumente se venderán 10 anuarios menos.

Jeff está ahora muy entusiasmado. La ganancia que obtenga el comité de anuario será usada por la escuela para patrocinar una familia necesitada de un país en desarrollo, por lo que él quiere que el comité tenga las mayores ganancias posibles. Él sabe, sin embargo, que un precio muy alto hará que las ventas sufran, y un precio muy bajo no devengará ganancias suficientes. Él piensa que podemos usar los datos que José ha recopilado para construir un modelo matemático que nos ayude a decidir cómo maximizar las ganancias. También piensa que esta información, podría, a la misma vez, ayudarlo a establecer cuántos anuarios ordenar y su precio de venta.

1. Dibuja una tabla semejante a la que mostramos abajo para ayudarte a organizar tu trabajo, luego usa la información de la discusión anterior para completarla.



Cantidad de anuarios a venderse	Costo total de impresos en \$	Precio de venta en \$	Ingreso total de ventas en \$	Ganancias en \$ (ingreso por ventas – costo de impresos)

Figura 1.3

2. La gráfica de ganancias (y) versus el precio (x) se muestra en la Figura 1.4 ¿Qué notas acerca de los puntos?

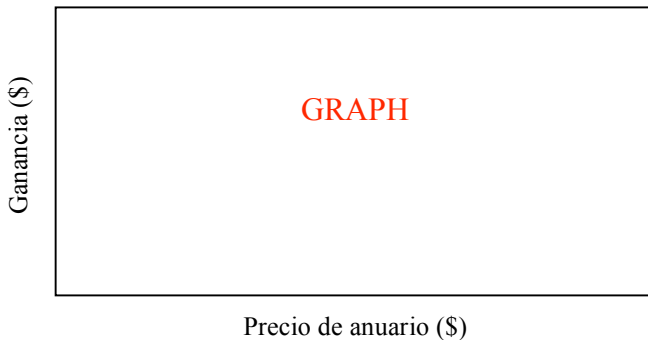
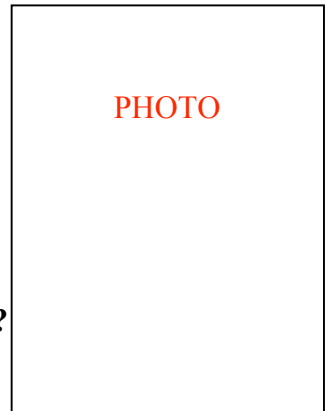


Figura 1.4



3. Un punto de la gráfica está marcado *A*. ¿A qué precio le corresponde? ¿Cuántos anuarios se venderán a este precio?
4. Estima el precio de los anuarios que tendrán mayor ganancia. Explica.

Compara tu estimado con los de tus compañeros de clase. ¿Cuál sería un buen precio para el anuario? Explica.

Lo que es interesante acerca de los pares ordenados (o función) representando la relación entre la ganancia y el precio, es que contrario a muchas de las otras funciones que hemos estudiado, éstas no forman una línea recta. De hecho, se puede dibujar una curva suave a través de los puntos, como se ilustra en la Figura 1.4. Esta curva se asemeja al trayecto tomado que tomaría una pelota cuando se la lanzas a un amigo. De hecho, las ecuaciones matemáticas para esta trayectoria de lanzar la pelota y la relación entre la ganancia y el precio en este ejemplo son muy semejantes. En la próxima sección, veremos cómo construir este tipo de modelos matemáticos y cómo estos pueden ser usados para describir muchas situaciones diferentes.

Por ahora, observemos otras implicaciones de esta gráfica describiendo la relación entre la ganancia y el precio.



- 1. ¿Forman los pares ordenados una función en esta ocasión?**
- 2. Si decides que el precio del anuario para obtener una ganancia máxima es muy alto y estás dispuesto a conformarte con una ganancia de \$20,000, entonces, ¿cuál sería el precio aproximado que cobrarías por el anuario? Explica por qué hay dos respuestas correctas a esta pregunta.**
- 3. ¿Qué pares ordenados corresponden al valor más alto de la función?**

El punto más alto de la curva se llama **vértice**. La curva de por sí se llama una **parábola** y es la forma básica usada para el diseño de antenas de satélites, reflectores de luces de automóviles y puentes suspendidos. No es sorprendente que una forma matemática tan importante sea definida por una ecuación matemática importante. Pero, ¿cómo sería una ecuación como ésta? Investigar esta pregunta es nuestra tarea para la próxima sección.



Conjunto de ejercicios: 1.1

- Para cada par de conjuntos X y Y , decide si Y es una función de X .
 - $X = \{\text{estudiantes}\}$; $Y = \{\text{estatura}\}$
 - $X = \{\text{cumpleaños}\}$; $Y = \{\text{personas}\}$
 - $X = \{\text{íntegros}\}$; $Y = \{\text{cubos de esos íntegros}\}$
- ¿Cuáles conjuntos de pares ordenados (x, y) representarán las funciones de x ?
 - $\{(1, 2), (-1, 2), (3, -3)\}$
 - $\{(2, 2)\}$
 - $\{(2, 5), (3, -2), (5, 5), (-3, 4), 2, -7)\}$
 - $\{(2, -1), (5, -1), (8, -1)\}$
 - $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
 - $\{(3, -4), (5, 4), (-2, -3), (5, 0)\}$
- ¿Cuál de estas ecuaciones describe las funciones de x ? Verifica tus respuestas graficándolas.
 - $y = 2x + 1$
 - $y = 4$
 - $x = -2$
 - $y = x^5 + 2$
 - $y = x^6 - 2$
- Eres un piloto de la Fuerza Aérea que le da la vuelta a la Tierra a altitudes muy bajas para evitar ser detectado por el radar. En el segundo viaje alrededor de la Tierra, vuelas una milla más arriba que en el primer viaje.
 - Sin hacer cálculos, estima cuántas millas tendrás que volar en el segundo viaje.
 - Recuerda la fórmula para la circunferencia de un círculo. Escribe una ecuación que defina la circunferencia de C como una función del radio r .
 - Sin que sepas la circunferencia de la Tierra, usa la función de la circunferencia para demostrar cuántas más millas adicionales tomará el segundo viaje.
 - Como ya sabes, la Luna es mucho más pequeña que la Tierra. Supón que una nave espacial hace dos viajes similares alrededor de la Luna a una milla de diferencia en altitud. Asumiendo que la órbita es aproximadamente circular, ¿por cuántas millas excederá el segundo viaje alrededor de la Luna, al primero?



PHOTO

5. Una forma de pensar acerca del concepto de función en un contexto diario común es pensar acerca de un trabajo de verano. La paga que recibes es una función de la cantidad de horas trabajadas. Dejemos que d represente los dólares recibidos y h denote las horas trabajadas. Digamos que tu tasa de pago es \$6.00 por hora.
- (a) Escribe una ecuación en la cual d es la función de h .
 - (b) ¿Cuánto dinero adicional ganarías si trabajaras ocho horas diarias?
 - (c) ¿Cuál es el dominio de esta función? Asume que trabajas de lunes a viernes ocho horas por día por diez semanas. ¿Qué factores en tu vida afectarían (restringen) este dominio?
 - (d) ¿Cuál es el alcance de esta función? ¿Cuál es la cantidad máxima de dinero que podrías ganar durante el verano?
6. La distancia que puedes ver en un día claro depende en cuán alto estés sobre el nivel de la tierra. Por ejemplo, puedes ver más lejos del tope de un edificio alto que de un tercer piso. Muchos edificios famosos tienen plataformas de observación en sus azoteas donde los visitantes pueden tener una vista fabulosa de la ciudad. Una función matemática que se aproxima a la relación entre la altura de tus ojos h (en pies) y la distancia que puedes ver a d (en millas) es $d(h) = 1.23\sqrt{h}$.
- (a) Asumiendo que tus ojos están a seis pies de la tierra, ¿cuán lejos puedes ver en un día claro?
 - (b) Cada piso de un edificio de apartamentos tiene aproximadamente 10 pies de altura. ¿Cuán más lejos puedes ver del piso veinte que del piso cuatro? ¿Por qué supones que el alquiler es más alto en los apartamentos de los pisos altos?
 - (c) Si estuvieras en un avión viajando a 30,000 pies, ¿cuán lejos podrías ver?
 - (d) ¿Cuán alto necesitarías estar sobre el centro geográfico de los Estados Unidos para poder ver el país en su totalidad, en vista de que mide 2807 millas de costa a costa?



- (e) ¿Podría una astronauta orbitando a 170 millas sobre la Tierra, ver los Estados Unidos en su totalidad si ella estuviera situada en el centro geográfico de los Estados Unidos?
- (d) En los tiempos de los barcos de vela, una pequeña plataforma llamada la cofa de vigía, estaba fija en el tope del mástil del barco. Los marineros subían a la parte alta del mástil y se paraban en la plataforma para avistar tierra. Si la plataforma del barco estaba a 10 pies sobre la línea del agua, y el mástil del barco estaba a 20 pies de altura, ¿cuán más lejos podrían ver del tope del mástil que del tope de la plataforma?

