Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Reconocer funciones lineales y no lineales de acuerdo a sus ecuaciones

Crear modelos matemáticos para resolver problemas de la vida real

Usar métodos algebraicos para establecer los valores máximos o mínimos de funciones cuadráticas

Usar modelos gráficos para establecer los valores máximos o mínimos de funciones cuadráticas.

1.2 Las funciones cuadráticas

En la sección anterior investigaste el precio de venta del anuario y cómo este precio afectó la ganancia que el comité pudo haber obtenido para patrocinar su familia de adopción. La ganancia dependía en ambos, el precio de venta y la cantidad de anuarios vendidos; y la cantidad vendida, a su vez, dependía del precio de venta. Al igual que en las relaciones de la vida real, las relaciones matemáticas algunas veces tiene dimensiones múltiples, y esto puede hacerlas muy complejas. En las matemáticas, con frecuencia podemos simplificar el manejo de dichas relaciones usando símbolos y la potencia del álgebra.

Cuando hacemos esto necesitamos pensar acerca de cuál es el factor clave en la relación. En el ejemplo del anuario, la variación en precio los guía a ambos, la ganancia y las ventas, así que deberíamos concentrarnos en el precio de venta. Más aún, podemos pensar en el precio como uno que sube o baja de alguna referencia, tal como \$30, el cual resulta en ventas de 1000 y una ganancia de \$5,000.

Si usamos el precio de \$30 como una referencia, podemos dejar que el cambio (subir o bajar) de este precio sea representado por a. Así, si $a = 3$, el precio sería \$33 y las ventas serían 1000 – 30 ó 970, porque perdemos 10 ventas por cada dólar que aumentemos el precio. Si $a = -1$, entonces el precio será \$29 y las ventas serían 1010. Recuerda que el costo para imprimir los libros ya se te ha dado, $y = 15x + 10{,}000$ donde x es la cantidad de anuarios impresos y y es el costo total. También recuerda que

Ganancia = Precio · Cantidad de anuarios vendidos – Costo de imprenta

PHOTO

1. **Haz una gráfica en tu cuaderno de notas similar a la de abajo y luego complétala. La primera fila ya está hecha.**

Reducción en precio (–) o aumento de precio (+) de $30	Precio nuevo	Cantidad vendida	Ingresos	Costo de impresos	Ganancia

Figura 1.5

2. **Usa la información en esta tabla para establecer una ecuación matemática para la ganancia (*y*) en términos de la variable *x*. Nota que aunque *p* hace más sentido para la ganancia, tu calculadora entiende la letra *y* solamente.**
3. **Grafica tu ecuación en la calculadora. ¿Tiene la misma forma general de la parábola que graficamos anteriormente? ¿En qué forma(s) es diferente?**
4. **¿Para qué valor de *x* ocurre la ganancia máxima? ¿A qué precio corresponde esto? ¿Es éste el mismo resultado que encontramos anteriormente? Explica.**
5. **¿A qué precio es la ganancia cero? ¿A cuántos libros vendidos esto corresponde? En los negocios, esto frecuentemente se llama el punto de equilibrio.**
6. **¿Forman una función de los pares ordenados que forman la gráfica? Explica.**
7. **¿Cuál es el dominio y alcance de la función de la ganancia?**

Una vez más, vale la pena recordar que una ecuación matemática cuando es usada como un modelo para alguna situación de la vida real, puede acarrear restricciones en las variables para que las respuestas tengan un sentido real. Si no nos preocupan tales interpretaciones, es con frecuencia cierto que las variables pueden tener cualquier valor que queramos. Las calculadoras generalmente dibujan gráficas de esta manera –asumiendo que la ecuación matemática está desprovista de un significado real. Debes usar tu conocimiento y buen sentido cuando estés decidiendo si la gráfica de la calculadora es razonable para tus propósitos.

La parábola que graficamos viene de la consideración de una función matemática que tiene un término cuadrático. Recuerda que las funciones lineales tales como $f(x) = 3x + 5$, la cual no tiene términos cuadráticos en ellos, siempre resulta en una gráfica de línea recta. Ahora sabemos que las funciones como $f(x) = -10x^2$ resultará en una curva parabólica cuando sea graficada.

Una frase a conocer: Una **función cuadrática** es definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq o$. La función tiene un término cuadrático como su potencia mayor.

PHOTO

¿Por qué crees que la palabra *cuadrática* es usada para describir dichas funciones?

Muchas otras aplicaciones de modelos matemáticos resultan en funciones cuadráticas similares.

Analiza el problema de Joanie y Kamini. Ellos quieres construir un corral rectangular para su conejo. Tienen exactamente 100 pies de alambrado que el papá de Kamini les dio. Ellos quieren que el corral tenga el área más grande posible. ¿De qué tamaño deberían hacer el corral?

Ellos podrían hacerlo largo y estrecho, digamos 49 pies por 1 pie, y eso les daría un área de 49 pies cuadrados. O, podrían hacerlo 30 pies por 20 pies y producir un área de 600 pies cuadrados. Se usará la misma cantidad de alambrado en ambas maneras.

Longitud	Ancho	Alambrado usado	Área

Figura 1.6

1. **Haz una tabla en tu cuaderno de notas semejante a la de la Figura 1.6 y complétala.**
2. **Dibuja una gráfica con la longitud en el eje de *x* y el área en el eje de *y*. Traza una curva suave a través de estos puntos. Haz un estimado de cuáles dimensiones producirán el área máxima.**
3. **¿Forman una función los pares ordenados de la gráfica? Explica.**
4. **¿Cuál es el dominio y el alcance?**
5. **¿Estás justificado en dibujar una curva sólida a través de estos puntos? Explica.**

Una vez más, tenemos una idea razonable acerca de la respuesta, pero el álgebra puede ayudarnos a resolver problemas tales como este de una forma mucho más eficiente. Sabemos que en este caso $2l + 2w = 100$, por lo que $l + w = 50$. También sabemos que el área (A) se nos da por la expresión $A = lw$. No podemos graficar relaciones que envuelvan más de una variable en el plano de coordenadas xy, sin embargo, necesitamos sustituirlas por l ó w. Sabemos que $w = 50 - l$, por lo que la expresión para esta área se convierte en

$$A = l(50 - l) = 50l - l^2$$

Como esto es una función cuadrática, debemos esperar que el resultado de la gráfica sea una parábola. Para graficar esta curva necesitas usar las variables x y y, porque esto es lo único que entiende la calculadora. La Figura 1.7 muestra la gráfica de los puntos de datos originales de la tabla de arriba y la función $y = 50x - x^2$, donde x es el largo y y es el área.

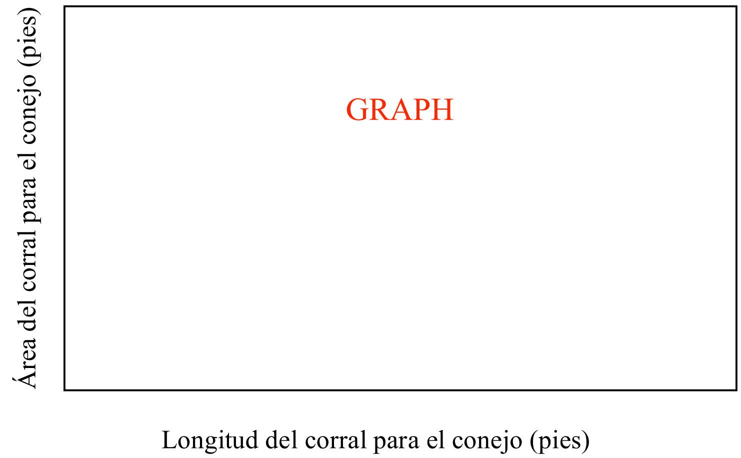

Figura 1.7

Debido a que la longitud y anchura son cantidades que pueden ser subdivididas en piezas mucho más pequeñas sin ningún límite, hay una cantidad infinita de pares ordenados que pueden ser establecidos para satisfacer la condición que $y = 50x - x^2$. Así que, podemos dibujar una curva sólida a través de los puntos. Pero si queremos que el modelo matemático tenga sentido, debemos restringir el dominio y alcance para que sean valores positivos, porque las longitudes negativas y áreas no hacen sentido. Ten en mente que los pares ordenados $(x, f(x))$, con $x < 0$, también satisfacen $f(x) = 50x - x^2$; simplemente no hacen sentido en términos de longitud y anchura de un rectángulo.

1. ¿Cuál es la coordenada del vértice en la parábola formada en la Figura 1.7?

2. ¿Cuándo el valor de la función es cero? ¿Qué significará esto?

En esta sección hemos visto que podemos encontrar el valor máximo de algo como la ganancia o área examinando la gráfica de una función cuadrática. Como resultado, algunos puntos en la parábola son más importantes para este propósito que otros. Por ejemplo, el vértice, el cual es el valor máximo (o tal vez el mínimo) de una función cuadrática, y los puntos donde la función es cero, nos dicen el **punto de equilibrio** en el ejemplo de la ganancia. En la próxima sección observaremos las formas en que podríamos encontrar estos puntos importantes más eficientemente.

Conjunto de ejercicios: 1.2

1. Grafica las siguientes funciones cuadráticas para encontrar

(a) el valor máximo o mínimo de una función

(b) el valor de x que produce el valor máximo o mínimo de una función

(i) $f(x) = x^2 - 4x - 4$

(ii) $f(x) = x^2 - 4x$

(iii) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

(iv) $f(x) = -1 - 4x - 4x^2$

2. Para poder ahorrar en el material a utilizarse para hacer el corral, Yolanda decide construir el corral para el conejo de tal forma que la pared del garaje actúe como un lado del corral. De esta forma ella solamente necesita alambrar tres lados del corral. Si comienza con 100 pies de alambre, ¿cuáles son las dimensiones del corral que le provea el área máxima?

3. Un agricultor tiene 10,000 libras de papas que sabe que puede vender a 20 centavos la libra. Sin embargo, por cada semana que espera para venderlas, el precio subirá 2 centavos por libra. Desafortunadamente, cada semana pierde 200 libra de papas por descomposición. ¿Cuándo debería él vender las papas para maximizar la cantidad total de dólares a recibir por su cosecha?

PHOTO