

## Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Resolver gráficamente ecuaciones cuadráticas

Resolver algebraicamente ecuaciones cuadráticas

Comprender la interpretación geométrica de las raíces de una ecuación cuadrática

Determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática

Usar la fórmula de la ecuación cuadrática para resolver problemas de la vida real.

## 1.3 Valores críticos de funciones cuadráticas

En los negocios es importante generalmente saber cuál es el punto de equilibrio. Esto es, el punto en el cual tus costos y tus ingresos son iguales. No estás logrando ganancias pero no estás perdiendo dinero tampoco.



**Digamos que la compañía Bagel Mania está investigando un producto nuevo. El departamento de mercadeo estableció que la ganancia en este producto se da a través de la función**

$$y = -x^2 + 10x - 24.99$$

**donde  $y$  es la ganancia y  $x$  es el precio al cual se venderá el producto.**

- 1. Diagrama la función  $y = -x^2 + 10x - 24.99$  y establece a qué precio la compañía cubrirá los gastos (ganancia = 0 y pérdida = 0).**
- 2. ¿Parecería que es posible obtener alguna ganancia en la venta de este producto? Explica.**

En este caso el producto no parece muy prometedor, pero algunas veces, ¡las apariencias engañan! Regresaremos a esta pregunta más adelante cuando tengamos más herramientas para examinarlo. Obviamente, diagramar una función y luego usar la función de trazar de una calculadora es una buena forma de encontrar los puntos donde la curva interseca el eje de  $x$ . Hay otras formas que en algunos casos son hasta más fáciles y regularmente más precisas.



**Digamos que tenemos una función  $y = x^2 - 4$ . Si queremos saber donde cruza el eje de  $x$ , es lo mismo que pedir los puntos donde el valor  $y$  es 0. Por consiguiente, podríamos mirar el problema de encontrar los puntos en el eje de  $x$  de la misma forma que usamos para encontrar en qué momento  $x^2 - 4 = 0$ . Esta ecuación es fácil de resolver porque podemos sumar 4 a ambos lados para obtener la ecuación  $x^2 = 4$  y encontrar ahora el pie cuadrado de cada lado para dar  $x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$ . Recuerda que la raíz cuadrada de un número puede ser positiva o negativa, por lo que hay dos valores posibles para  $x$ . Esto nos dice que los puntos donde la curva representada por  $y = x^2 - 4$  interseca los ejes de  $x$ , son  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$ .**

- 1. Haz un diagrama de la función  $y = x^2 - 4$  y verifica que estos puntos son correctos.**

2. Usa este nuevo método para encontrar los puntos donde cada una de las siguientes funciones interseca el eje de  $x$ . Verifica tus respuestas diagramándolas.

(a)  $y = x^2 - 16$

(b)  $y = x^2 - 6$

(c)  $y = -x^2 + 5$

Este nuevo método es muy rápido y directo, así que tratemos de usarlo en nuestra función de ganancia  $y = -x^2 + 10x - 24.99$ . Primero, dejamos que  $y = 0$  para producir la ecuación  $-x^2 + 10x - 24.99 = 0$ . Luego añade 24.99 a ambos lados para obtener  $-x^2 + 10x = 24.99$ . Ahora estamos atrapados porque no tenemos forma de averiguar la raíz cuadrada de la expresión  $-x^2 + 10x$ . Necesitamos desarrollar más herramientas matemáticas antes de que podamos resolver esta ecuación.

Asume que queremos resolver la ecuación  $x^2 + 8x + 2 = 0$ . Continuando con nuestro método anterior reordenaremos para darle  $x^2 + 8x = -2$ . Ahora no podemos encontrar la raíz cuadrada de la expresión  $x^2 + 8x$ . Esto es debido a que es un *cuadrado incompleto*. Para ver qué esto significa, toma en consideración el diagrama en la Figura 1.8.

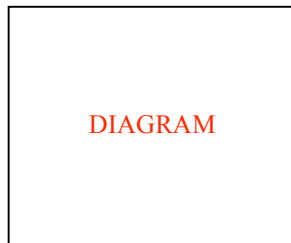


Figura 1.8

Podemos pensar en un término como  $x^2$  como un cuadrado que tiene ambas una longitud y anchura  $x$  y un área de  $x^2$ . Un término tal como  $8x$  puede ser pensado como  $4x + 4x$  o dos rectángulos que tienen una longitud de  $x$  y una anchura de 4. Por lo que cada uno tiene un área de  $4x$  unidades cuadradas. El diagrama claramente muestra por qué llamamos una expresión como  $x^2 + 8x$  un cuadrado incompleto porque falta una pieza del cuadrado completo (ésta es la porción sombreada en la parte inferior izquierda de la Figura 1.8). Es también muy fácil ver que la pieza que falta es un cuadrado que mide 4 unidades por 4 unidades ó 16 unidades cuadradas en área. Un cuadrado pequeño como éste, completará el cuadrado. Podemos encontrar entonces la raíz cuadrada de la expresión resultante  $x^2 + 8x + 16$  porque la raíz cuadrada es solamente la longitud del lado del cuadrado que es  $x + 4$ .

### Sugerencia

**Trata de pensar en algo simple.** Regularmente, cuando enfrentemos este tipo de situaciones, nos ayuda el mirar los problemas más simples, desarrollar un plan de ataque, y luego regresar al problema original.



1. Usa la Propiedad Distributiva para evaluar

$$(x + 4)(x + 4) \text{ ó } (x + 4)^2$$

Debido a que  $x^2 + 8x + 16$  es lo mismo que  $(x + 4)^2$ , entonces,  $\sqrt{x^2 + 8x + 16}$  es lo mismo que  $\sqrt{(x + 4)^2} = |x + 4|$ . Parece ser la clave para encontrar la raíz cuadrada de una expresión algebraica es asegurarse que tenemos un cuadrado completo antes de tratar de encontrar la raíz cuadrada.

2. Cada una de las siguientes expresiones es un cuadrado incompleto:

(a)  $x^2 + 10x$

(b)  $x^2 + 20x$

(c)  $x^2 + 7x$

Para cada expresión

- (i) Dibuja y rotula un diagrama para representar la expresión similar a la de la Figura 1.8.
- (ii) Establece el área del cuadrado pequeño que se necesitará añadir para obtener un cuadrado completo.
- (iii) Cambia cada uno de los cuadrados incompletos en un cuadrado completo.
- (iv) Encuentra la raíz cuadrada de un cuadrado completo.

Ahora estamos preparados para regresar a nuestro problema original de resolver la ecuación  $x^2 + 8x + 2 = 0$ . El primer paso es restar 2 de ambos lados para producir  $x^2 + 8x = -2$ . Podemos ver que la expresión de la izquierda es un cuadrado incompleto. Puede ser cambiado a un cuadrado completo añadiéndole 16, y podemos hacer esto siempre y cuando añadamos 16 a su lado derecho y mantengamos la ecuación balanceada. Esto produce una nueva ecuación

PLACE EQUATION HERE

que puede ser simplificada a

PLACE EQUATION HERE

Ahora podemos encontrar la raíz cuadrada de ambos lados  $\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{14}$  lo que significa  $|x + 4| = \sqrt{14}$  y esto resulta en dos ecuaciones  $x + 4 = \sqrt{14}$  ó  $x + 4 = -\sqrt{14}$ , por lo que  $x + 4 = \pm 3.74$  (exactamente a 2 lugares decimales).

Resolver la  $x$  nos da  $x = 4 + 3.74 = -0.26$  y  $x = -4 - 3.74 = -7.74$ . Esto significa que hay dos puntos donde la curva interseca el eje de  $x$ . Uno es  $(-0.26, 0)$  y el otro es  $(-7.74, 0)$ . Esto es muy interesante porque las ecuaciones con las que hemos tratado anteriormente generalmente tienen solamente una solución.

En este caso hemos mostrado que la ecuación  $x^2 + 8x + 2 = 0$  tiene dos soluciones, las cuales satisfacen la ecuación original.



1. **Sustituye  $x = -0.26$  en la ecuación. ¿Satisface esto la ecuación? Explica.**
2. **Sustituye  $x = -7.74$  en la ecuación. ¿Satisface esto la ecuación? Explica.**
3. **Diagrama la función  $y = x^2 + 8x + 2$ . Usa la función TRACE para encontrar las coordenadas de los puntos donde la función cruza el eje de  $x$ . ¿Cómo se compara tu respuesta con los valores encontrados arriba?**

El poder real de la técnica que hemos aprendido es que nos permite poner la potencia del álgebra a trabajar para encontrar la solución de la ecuación cuadrática. Luego no tendremos que hacerlo nuevamente de la forma larga. Dicha fórmula puede también ser programada en una calculadora para hacer las soluciones de estas ecuaciones mucho más fácil. El proceso es idéntico al que hicimos anteriormente. Comencemos con la ecuación cuadrática.

PLACE EQUATION HERE

donde  $a \neq 0$ . El primer paso es dividirlo por  $a$ , produciendo

PLACE EQUATION HERE

Ahora resta  $\frac{c}{a}$  de ambos lados para producir un cuadrado incompleto.

Esto nos da  $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$ .

El diagrama en la Figura 1.9 ilustra el cuadrado incompleto para  $x > 0$ .

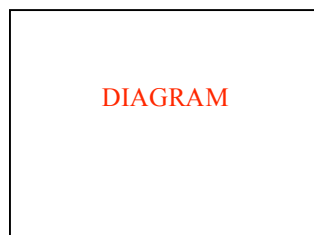


Figura 1.9

El cuadrado pequeño que necesita añadirse para completar el cuadrado tiene un lado igual a  $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{2a}$  y la pieza que necesita ser añadida para completar el cuadrado grande es  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ .

Esto produce la expresión  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ .

El lado izquierdo de la ecuación es ahora el cuadrado de  $x + \frac{b}{2a}$ , independientemente de que  $x$  es positivo, negativo, o cero. Podemos restar las fracciones en el lado derecho después que obtengamos un denominador común. Esto produce  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ .

Ahora podemos encontrar la raíz cuadrada de ambos lados dando

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \text{ que significa } \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ó

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente añadimos  $-\frac{b}{2a}$  a ambos lados para aislar  $x$ , luego combinar las dos respuestas y encontrar que

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esto se llama la **fórmula cuadrática**.

Tal vez parezca que esto es mucho trabajo, ¡y lo fue! Pero, tenemos ahora una fórmula que te dará las soluciones para cualquier ecuación cuadrática. Las soluciones para una ecuación cuadrática se llaman **raíces** de la ecuación.

**Dato a conocer:** Las raíces de una ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a \neq 0$ , son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos cómo esta fórmula podría haber simplificado el trabajo de encontrar las raíces de la ecuación  $x^2 + 8x + 2 = 0$ . En este caso  $a = 1$ ,  $b = 8$ , y  $c = 2$ . Las raíces están dadas por

PLACE EQUATION HERE

Por lo que son

$$x_1 = \frac{-8 + 7.48}{2} = -0.26 \text{ y } x_2 = \frac{-8 - 7.48}{2} = -7.74$$

exactamente igual anteriormente.



1. Usa la fórmula cuadrática para resolver cada uno de las siguientes:

(a) PLACE EQUATION

(b) PLACE EQUATION

(c) PLACE EQUATION

2. Encuentra la raíz de cada una de las siguientes:
- (a) PLACE EQUATION
  - (b) PLACE EQUATION
  - (c) PLACE EQUATION
3. Para cada una de las siguientes, encuentra la raíz de la ecuación y explica qué significa gráficamente:
- (a) PLACE EQUATION
  - (b) PLACE EQUATION
  - (c) PLACE EQUATION

Está claro que las ecuaciones cuadráticas podrían tener más de dos soluciones. Pero, como hemos visto hasta ahora, tal vez podrían tener una sola raíz si la parábola interseca el eje de  $x$  como un solo punto. También es posible tener soluciones de números no reales si no se intersecan del todo. Esta última situación es una complicada y ocurre debido a que tenemos que encontrar la raíz cuadrada de un número negativo, por ejemplo,  $\sqrt{-4}$ . Aunque no podemos pensar en dos números que son exactamente iguales que se multiplican juntos para producir  $-4$ , los matemáticos han desarrollado un sistema de números donde esas cosas son posibles. Este sistema numérico se llama un conjunto de **números complejos**. Tiene aplicaciones en matemáticas avanzadas, ingeniería eléctrica y algunos tipos de efectos especiales generados por computadoras para videos y películas. Podrías encontrar números complejos en tus últimos estudios matemáticos.

Para propósitos nuestros, es suficiente con decir que no hay una solución real si la fórmula cuadrática resulta en un número negativo bajo el radical. Significa que la parábola no interseca el eje de  $x$ . Actualmente, no tenemos que encontrar las raíces para decidir si son o no reales. La cantidad bajo el radical,  $b^2 - 4ac$ , es todo lo que importa si queremos saber si las raíces son números reales.

**Término a conocer:** el **discriminante**  $b^2 - 4ac$  nos permite ver las diferencias entre varias clases de raíces de una ecuación cuadrática.

**Encuentra el valor de la expresión  $b^2 - 4ac$  para las preguntas 3(a), (b) y (c). ¿Cómo puedes saber si la ecuación tendrá una raíz real, dos raíces reales o ninguna raíz real?**

### Términos

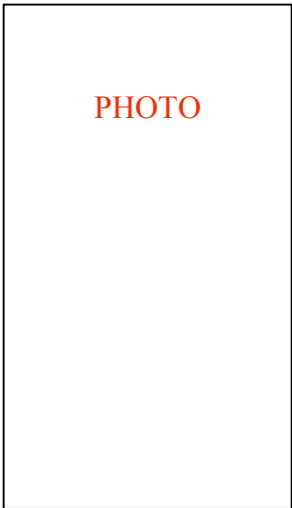
La palabra *discriminar* significa poder ver la diferencia entre las cosas.



Estamos ahora listos para regresar y reconsiderar el problema que comenzó toda esta discusión –encontrar el punto de equilibrio para la compañía Bagel Mania, usando la función de ganancia  $y = -x^2 + 10x - 24.99$ . Encontrar el punto de equilibrio significa encontrar dónde la gráfica interseca el eje de  $x$ , y esto significa que necesitamos resolver la ecuación  $-x^2 + 10x - 24.99 = 0$ . En este caso  $a = -1$ ,  $b = 10$  y  $c = -24.99$ .



1. **Usa la fórmula cuadrática para encontrar el punto de equilibrio para esta función.**
2. **¿Confirma esto lo que encontraste anteriormente al hacer la gráfica de la función en tu calculadora? Explica.**
3. (a) **¿Con qué precio de venta la compañía Bagel Mania perdió dinero en este producto?**  
 (b) **¿Con qué precio de venta la compañía Bagel Mania ganó dinero en este producto?**



Este último ejemplo ilustra por qué la fórmula cuadrática es tan útil. Las gráficas de funciones cuadráticas podrían intersecar el eje de  $x$  una vez, dos veces o ninguna. Los puntos de intersección se llaman los ceros o raíces de la función. La gráfica en la Figura 1.10 es una gráfica más precisa que la que tu calculadora podría producir y muestra los dos puntos de intersección más claramente.

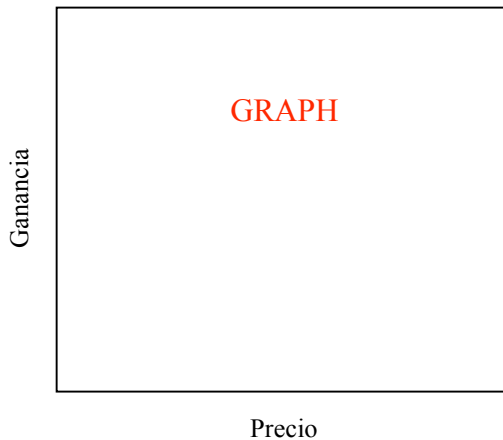


Figura 1.10

El otro punto importante en una parábola es el vértice, porque este es el punto donde la función alcanza su valor máximo o mínimo. En términos de funciones de ganancias, esto generalmente nos permite establecer una forma de ponerle precio a nuestro producto si queremos producir una ganancia máxima –un concepto importante en el mundo de los negocios. Resolveremos este problema en la próxima sección.

### Conjunto de ejercicios: 1.3

1. Encuentra los ceros de las siguientes funciones:
  - (a) PLACE EQUATION HERE
  - (b) PLACE EQUATION HERE
  - (c) PLACE EQUATION HERE
  - (d) PLACE EQUATION HERE
  - (e) PLACE EQUATION HERE
2. Encuentra los ceros de las siguientes ecuaciones cuadráticas:
  - (a) PLACE EQUATION HERE
  - (b) PLACE EQUATION HERE
  - (c) PLACE EQUATION HERE
  - (d) PLACE EQUATION HERE
3. Usa el discriminante para decidir si cada uno de los siguientes tendrá uno, dos o ninguna intersección de  $x$ ; luego cotéjalo diagramándolo:
  - (a) PLACE EQUATION HERE
  - (b) PLACE EQUATION HERE
  - (c) PLACE EQUATION HERE
4. El margen de ganancia de un producto electrónico en particular se da por la fórmula  $P = -p^2 + 2p + 8$  donde  $P$  es la ganancia lograda en el producto y  $p$  es el precio cobrado por el producto. ¿A qué precio el fabricante cubrirá los gastos?
5. El margen de ganancia de un prenda de vestir se da por la fórmula  $P = -p^2 + 8p - 14$  donde  $P$  es la ganancia lograda en el artículo y  $p$  es el precio cobrado por el artículo.
  - (a) Encuentra dos precios que permitirán al fabricante cubrir los gastos.
  - (b) Explica por qué hay dos posibles precios que podrían cubrir los gastos en este problema, pero solamente uno en el problema anterior.
6. El departamento de mercadeo de Joe's Bait y Tackle calcula el margen de ganancia en un señuelo o carnada de pesca nuevo, usando la fórmula  $P = -2.1p^2 + 6p - 12$  donde  $P$  es la ganancia lograda en el producto y  $p$  es el precio cobrado por el señuelo. Muestra que es imposible cubrir los gastos con este producto. Interpreta tus hallazgos con un diagrama.