Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Indicar las coordenadas del vértice para la función $y = ax^2 + bx + c$

Indicar la ecuación del eje de simetría para la función $y = ax^2 + bx + c$

Aplicar estas ideas a la solución de los problemas de maximización y minimización.

1.4 Encontrando las coordenadas del vértice

Sabemos que regularmente podemos encontrar el vértice (el valor máximo o mínimo de *y*) de una parábola dibujando una gráfica y luego estimando las coordenadas de la gráfica. También hemos visto que esto es a veces difícil cuado la gráfica no es tan detallada como la necesitamos. Sin embargo, usemos gráficas para establecer un patrón que nos ayude a encontrar el vértice fácilmente sin la gráfica.

1. Usa tu calculadora para diagramar cada uno de los siguientes y establece la coordenada de *x* del vértice:

(a) PLACE EQUATION

(b) PLACE EQUATION

(c) PLACE EQUATION

(d) PLACE EQUATION

2. Encuentra los ceros de cada una de las funciones anteriores usando la calculadora o la fórmula cuadrática.

3. ¿Cómo está relacionada la coordenada de *x* del vértice a los ceros?

Una característica de la parábola que hemos discutido es la *simetría*. Si una línea vertical es dibujada a través del vértice, la parábola puede ser reflejada alrededor de la línea y continuar viéndose exactamente igual. Esta línea se llama **eje de simetría**. En la Figura 1.11 se ilustran el eje de simetría para la parábola definida por la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Esto hace más fácil ver la coordenada de *x* del vértice, en este caso, 2. Las dos raíces son $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$.

Debido a que la parábola es una curva simétrica, el punto en el eje de *x* donde el eje de simetría lo cruza, se encuentra entre medio de los dos puntos donde la parábola interseca el eje de *x*. En otras palabras, el eje de simetría interseca el eje de *x* en un punto donde la coordenada de *x* es el promedio de las raíces. En este caso el punto es (2, 0) y el promedio de las raíces es $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

En vista de que el eje de simetría es una línea vertical, la coordenada de x del vértice será la misma que la coordenada de x de todos los puntos en este eje. Una vez sepamos la coordenada de x del eje de simetría, podemos encontrar la coordenada y sustituyendo en la definición de la función original $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Entonces, evaluamos la función $f(2) = (2)^2 - (4)(2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$. Por consiguiente, la coordenada del vértice es $(2, -9)$. Esto es confirmado por la gráfica.

Axis of simmetry $x = 2$ = eje de simetría de $x = 2$

PHOTO

Figura 1.11

1. **(a)** **Usa la fórmula cuadrática para encontrar los ceros de la ecuación $x^2 - 5x + 5 = 0$.**

   (b) **Encuentra el promedio de los ceros.**

   (c) **Usando $f(x) = x^2 - 5x + 5$, encuentra la coordenada del vértice.**

   (d) **Haz un diagrama de la función y verifica que la coordenada del vértice es correcta.**

Ahora que podemos entender la idea, se puede usar la potencia del álgebra para generalizar. Sabemos que las raíces de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ son $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Para encontrar la coordenada de x del vértice, promedia las coordenadas de x de las dos raíces.

La suma de las raíces está dada por

PLACE EQUATION HERE

El promedio es la suma divida por 2 ó $\frac{-b}{2a}$.

Dato a conocer: La coordenada de x del vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ es $\frac{-b}{2a}$.

Hay un punto muy importante –aunque el álgebra parezca compleja al comienzo, no deberíamos sentirnos intimidados. El resultado fue fácil de encontrar porque todas las partes confusas de la expresión desaparecieron, y el resultado final es realmente muy simple.

Para encontrar el vértice de una parábola representada por la función cuadrática

PLACE EQUATION HERE

calculamos $\frac{-b}{2a}$ para determinar la coordenada de x

PLACE EQUATION HERE

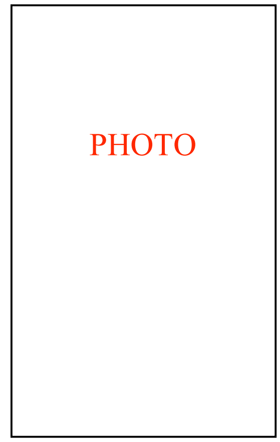
Luego evalúa la función cuando $x = 2$ para determinar la coordenada de y.

PLACE EQUATION HERE

Así que, las coordenadas del vértice son (2, –7). Como un bono también sabemos la ecuación del eje de simetría. Debido a que cada punto en una línea vertical tiene la misma coordenada de x, el eje de simetría tiene una ecuación $x = -\left(\frac{b}{2a}\right)$ ó en este caso $x = 2$.

1. **Verifica que la vértice es (2, –7), diagramando la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.**
2. **Encuentra el vértice y la ecuación del eje de simetría para cada una de las siguientes:**
   - **(a) PLACE EQUATION HERE**
   - **(b) PLACE EQUATION HERE**
   - **(c) PLACE EQUATION HERE**
   - **(d) PLACE EQUATION HERE**
   - **(e) PLACE EQUATION HERE**

Conjunto de ejercicios: 1.4



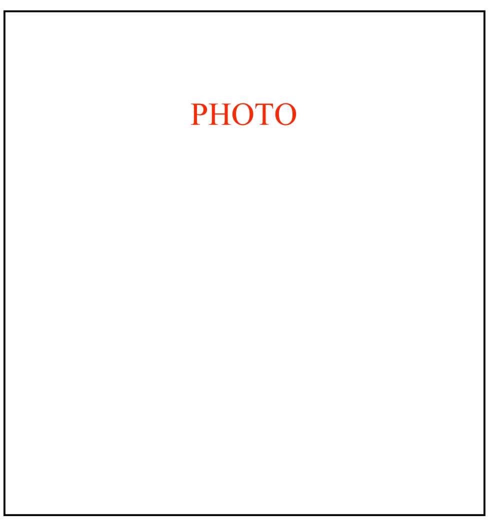
1. Un vuelo fletado a la Florida cuesta $200 por persona para 10 personas o menos. El agente de viajes dice que reducirá el precio de todos si viajan más personas. De hecho, por cada cuatro personas adicionales, reducirá el costo del viaje por $16. ¿Cuántas personas rendirán la cantidad mayor de dólares en ventas para el agente de viajes? Haz una tabla para determinar la respuesta.

2. Una pelota es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 20 pies por segundo. La distancia en pies desde el suelo es una función de tiempo definido por $s = -4.9t^2 + 20t$ donde s es la distancia y t es el tiempo en segundos.

- **(a)** Encuentra la altura máxima que alcanzó la pelota.
- **(b)** ¿Cuándo alcanzará la pelota esta altura?
- **(c)** ¿Cuándo caerá la pelota al suelo?

3. Encuentra un número natural tal que la suma del número y su cuadrado sea un mínimo.

4. Tienes 500 pies de borde plástico que se usa para delimitar un macizo de flores. Quieres hacer dos macizos de flores, uno cuadrado y otro circular. ¿A qué dimensiones deberías de hacerlas si quieres que la suma de las dos áreas sea el máximo?



5. La suma de los dos números enteros es 100. Si la suma de los cuadrados de los números debería ser el mínimo, ¿qué deberían ser?