

1.5 Transformaciones de las funciones cuadráticas

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Mostrar el papel que juegan las transformaciones en la ecuación cuadrática y gráfica

Indicar el vértice, el eje de simetría y la dirección de la apertura para las gráficas de ecuaciones cuadráticas transformadas

Ajustar una función cuadrática a un conjunto de puntos de datos dados

Construir modelos matemáticos para acomodar los datos.

En secciones anteriores de este capítulo encontramos que cuando pares ordenados son tramados algunas veces no caen en una línea recta. De hecho, algunas veces caen en una curva especial llamada una parábola. El valor de hacer modelos matemáticos cae en nuestra habilidad para aplicar otras herramientas matemáticas y el conocimiento de ellas. Pero si no tenemos puntos de datos, ¿cómo podemos encontrar la ecuación de la parábola que pasa a través de los puntos? Claramente, las parábolas vienen en muchas formas y tamaños diferentes y parecen ser una tarea abrumadora para encontrar la correcta, para que quepa en un conjunto de datos que se nos ha dado.

Sin embargo, hay formas fáciles de cambiar la forma de una parábola. Una vez las conocemos, el método de encontrar cuál cabe en un conjunto de puntos de datos, llamado una **transformación**, sería mucho más fácil. La siguiente exploración repasa y extiende las ideas acerca de cómo cambiar la forma de las gráficas que estudiaste anteriormente en **MATH Connections**.

EXPLORACIÓN



1. Usa tu calculadora para diagramar cada uno de los siguientes. Usa WINDOW donde $-5 \leq x \leq 5$ y $-20 \leq y \leq 20$.

(a) $y = x^2$

(b) $y = x^2 + 3$

(c) $y = x^2 - 5$

(d) $y = x^2 + 1$

- (i) Indica el vértice para cada uno.
- (ii) Explica en palabras qué le ocurre a la gráfica al añadir un número a la función.
- (iii) Indica, sin diagramar, las coordenadas del vértice de $y = x^2 - 2$.
- (iv) Indica, sin diagramar, las coordenadas del vértice de $y = x^2 + 5$.
- (v) Indica las coordenadas del vértice de la función $y = x^2 + q$.

PHOTO

2. Usa tu calculadora para diagramar cada uno de los siguientes. Usa WINDOW donde $-5 \leq x \leq 5$ y $-20 \leq y \leq 20$.

(a) $y = x^2$

(b) $y = (x - 1)^2$

(c) $y = (x - 4)^2$

(d) $y = (x + 3)^2$

- (i) Indica el vértice para cada uno.
- (ii) Explica en palabras qué le ocurre a la gráfica al añadir un número a la variable.
- (iii) Indica, sin diagramar, las coordenadas del vértice de $y = (x - 3)^2$.
- (iv) Indica, sin diagramar, las coordenadas del vértice de $y = (x + 5)^2$.
- (v) Indica las coordenadas del vértice de la función $y = (x - p)^2$.
3. Usa tu calculadora para diagramar cada uno de los siguientes. Usa WINDOW donde $-5 \leq x \leq 5$ y $-20 \leq y \leq 20$.

(a) $y = x^2$

(b) $y = (x - 3)^2 + 5$

(c) $y = (x - 2)^2 - 1$

(d) $y = (x + 4)^2 - 2$

- (i) Indica el vértice para cada uno.
- (ii) Sin diagramar, indica las coordenadas del vértice de $y = (x + 7)^2 - 3$. Verifica haciendo un diagrama.
- (iii) Indica las coordenadas del vértice de la función $y = (x - p)^2 + q$.
4. Si una parábola definida por $y = x^2$ fue movida para que su vértice fuera (2, 5), entonces, ¿cuál será su ecuación?
5. Si una parábola definida por $y = x^2$ fue movida para que su vértice fuera (-2, 3), entonces, ¿cuál será su ecuación?
6. Si una parábola definida por $y = x^2$ fue movida para que su vértice fuera (-1, -4), entonces, ¿cuál será su ecuación?
7. Si una parábola definida por $y = x^2$ fue movida para que su vértice fuera (3, -2), entonces, ¿cuál será su ecuación?

Ahora tenemos una forma de mover parábolas alrededor en el plano *coordenado* para que así el vértice esté donde lo queremos. El próximo paso es cambiar la forma para que se adapte a los puntos.

8. Usa tu calculadora para diagramar cada uno de los siguientes. Usa WINDOW donde $-5 \leq x \leq 5$ y $-20 \leq y \leq 20$.

(a) $y = x^2$ (b) $y = 2x^2$ (c) $y = 0.3x^2$
(d) $y = 4x^2$ (e) $y = -3x^2$ (f) $y = -0.5x^2$

Si una parábola tiene la forma de una colina, decimos que abre hacia abajo. Si tiene la forma de un valle, decimos que se abre hacia arriba. Para cada una de las gráficas de arriba, provee la dirección de la apertura.

9. Sin diagramar, provee la dirección de la apertura para cada una de las siguientes:

(a) $y = -1.5x^2$ (b) $y = 2.5x^2$ (c) $y = 0.4x^2$
(d) $y = -6x^2$ (e) $y = -0.2x^2$

10. ¿Cuál de las parábolas en el problema 9 será más estrecha que $y = x^2$? ¿Cuál será más ancha? Explica.

Tres datos a conocer:

1. El vértice de la parábola representado por la función cuadrática $y = k(x - p)^2 + q$ es el punto (p, q) .
2. Si $k > 0$ la parábola se abre hacia arriba. Si $k < 0$ la parábola se abre hacia abajo.
3. Si $k > 1$, ó si $k < -1$ la parábola es más estrecha que la parábola $y = x^2$. Si $0 < k < 1$, ó si $0 > k > -1$ la parábola es más ancha que la parábola $y = x^2$.



Pongamos este nuevo conocimiento a trabajar buscando la mejor parábola para que quepa en un conjunto de puntos de datos. Luego establece su ecuación. Lleva a cabo los pasos en tu computadora.

Un científico ha completado un experimento y reúne los datos en una tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	16.1	10.6	6.1	2.5	-0.2	-2	-2.9	-2.9	-2	-0.2	2.5

Paso 1. Haz una gráfica de los datos y busca patrones (véase Figura 1.12).

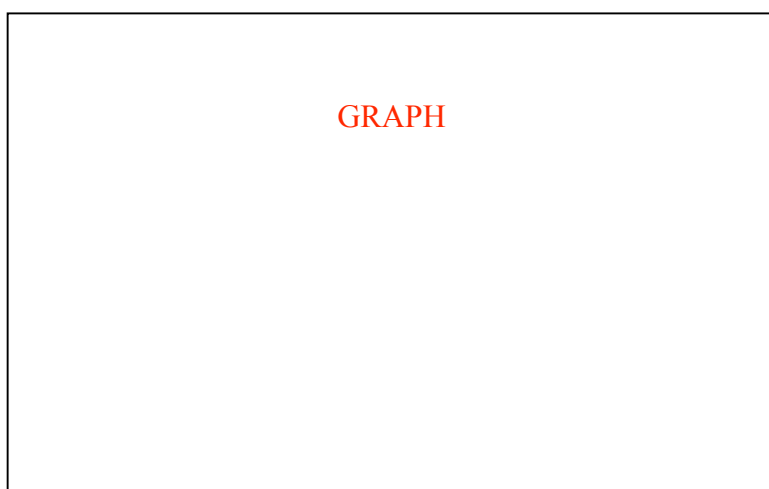


Figura 1.12

Si parece ser parabólica, decide si la curva se abre hacia arriba o hacia abajo. Luego estima el vértice. En este caso el vértice aparenta ser alrededor de $(1.5, -3)$. La parábola se abre hacia arriba, por lo que sabemos que el valor de k es positivo. Ahora tratemos la función $y = (x - 1.5)^2 - 3$. Esto se muestra en la Figura 1.13 como la curva sólida.

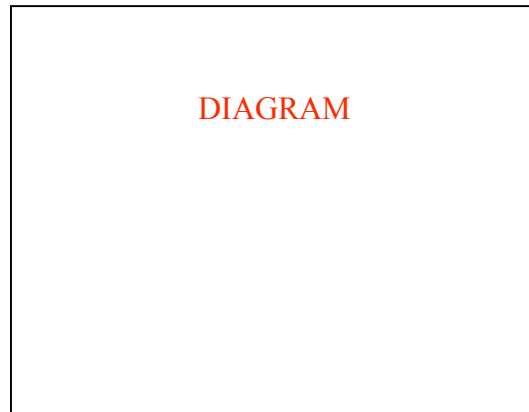
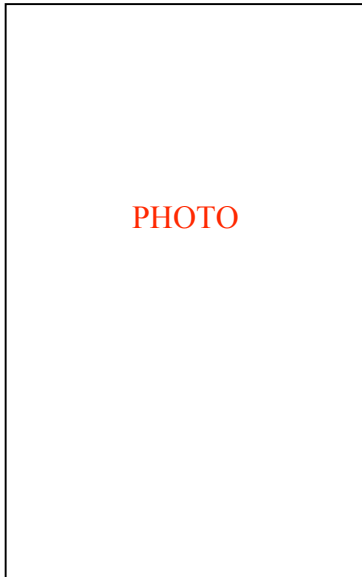


Figura 1.13



Paso 2: Ajusta el vértice, si fuera necesario. Si el vértice se ve bien, trata varios valores de k para hacer la parábola más ancha y más estrecha. Debido a que la parábola necesita ser más ancha, escogemos valores que son menores que 1, pero debido a que se abre, también necesitamos valores positivos.

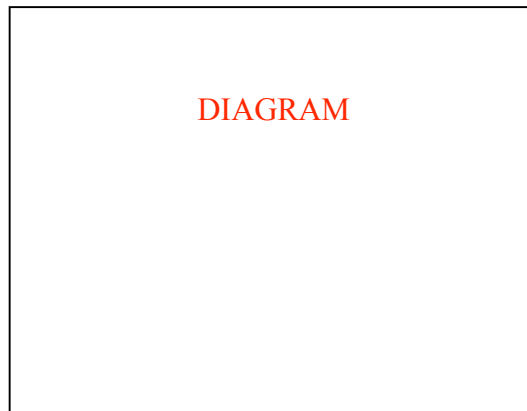


Figura 1.14

La gráfica en la Figura 1.14 ilustra valores de k de 0.6 (no lo suficiente), 0.3 (demasiado) y 0.45 (lo necesario).

Cuando uses tu calculadora, no mantendrás todas las gráficas en la pantalla. Mientras vas modificando tu ecuación, la gráfica en que estás trabajando se acercará más y más a los puntos. Las tres gráficas están ilustradas aquí para demostrar como progresan.

Ahora que la curva cabe muy bien en los puntos, tenemos una función cuadrática exitosa que actúa como un modelo matemático para los datos. La función es

ECUATION

Usa la Propiedad Distributiva para escribir esta función en la forma $y = ax^2 + bx + c$. Encuentra el vértice usando la técnica discutida en la Sección 1.4. Ahora usa TRACE para ver cuán cerca está el vértice de lo que calculaste.



Conjunto de ejercicios 1.5

1. Usa las técnicas discutidas en esta sección para establecer una función cuadrática que modele los datos provistos.

(a)

(b)

(c)

(d)

2. En la sección 1.1 estableciste una tabla de valores para ganancia versus precio para el anuario escolar. Usa estos datos para trazar la ganancia en el eje de y y precio en el eje de x .

(a) Establece una función cuadrática que te provea la ganancia (y) como una función del precio (x).

- (b) Encuentra el punto de equilibrio para esta función.
 - (c) Encuentra el vértice de esta función.
 - (d) ¿Qué precio debería cobrarse por el anuario escolar para obtener una ganancia máxima? ¿Confirma esto lo que encontraste anteriormente? Explica.
3. Los biólogos en Kentucky coleccionan datos sobre la cantidad de mosquitos (en millones) y la cantidad de lluvia caída en el mes de junio. Encontraron que dos pulgadas de lluvia resultaron en un conteo de insectos de 16 millones, cuatro pulgadas resultaron en 24 millones y siete pulgadas resultaron en 21 millones.
- (a) Usa estos datos para establecer una función cuadrática que pueda ser usada para predecir la población de mosquitos.
 - (b) Predice el conteo de mosquitos cuando hay una pulgada de lluvia en el mes de junio.
 - (c) ¿Habrá otra cantidad de pulgadas de lluvia que corresponda a la misma cantidad de insectos en la parte (b)? Si es así, ¿cuál?
 - (d) Si fueras a acampar en Kentucky en el mes de junio, ¿cuántas pulgadas de lluvia te desalentarían más, basado en el conteo de mosquitos?

