1.6 Más funciones polinómicas

En las secciones anteriores, hemos examinado una cantidad de problemas en los cuales tratamos de maximizar algo –de ganancias de los anuarios hasta el tamaño del corral de un conejo. En cada caso pudimos crear una ecuación matemática que era un modelo para la situación que estamos considerando. Mucho otros problemas reales envuelven tratar de maximizar o minimizar cantidades. Anteriormente haz hecho algunos problemas que envolvieron estas ideas en **MATH** *Connections*. Veamos cómo nuestro conocimiento de las funciones nos ayuda a resolver dichos problemas más fácilmente.

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Usar técnicas gráficas para encontrar los valores máximos o mínimos de funciones cúbicas

Reconocer las características de las gráficas en funciones cúbicas

Reconocer las características de una gráfica de funciones polinómicas mayores

Predecir la cantidad de puntos de inflexión para una función polinómica

Predecir la cantidad máxima de puntos de intersección con el eje de x para una función polinómica.

Toma en consideración el siguiente ejemplo:
La compañía Acme Carton fabrica cajas rectangulares de cartón. Ellos pudieron comprar un cargamento grande de piezas de cartón precortado de 20 cm. por 10 cm. de una compañía que cerró sus funciones. La compañía Acme compró estos cartones a bajo precio y ahora quiere hacer las cajas cortando un pie cuadrado de cada esquina, y doblando los lados, para luego pegarlas con cinta adhesiva. ¿De qué dimensiones deberán hacer las cajas si quieren maximizar el tamaño?

1. **Para tener una idea de lo que podría suceder al volumen si usamos cortes de tamaños diferentes en cada una de las esquinas, copia la tabla de abajo en tu cuderno de notas y luego complétala.**

Tamaño de corte (cm.)	**Longitud (cm.)**	**Ancho (cm.)**	**Altura (cm.)**	**Volumen**	**Volumen (cm^3)**

Figura 1.15

(2) Haz una gráfica de tu tabla de los pares ordenados representando la altura y volumen. ¿Hay algunos patrones obvios? Explica.

Aunque podemos estar razonablemente seguros que los puntos no están en una línea, no está claro qué tipo de forma ellos siguen, y la gráfica no ayuda a establecer el volumen máximo del envase.

Tratemos un enfoque un poco diferente, uno en el que tengamos que utilizar el álgebra. Si el lado del corte cuadrado es x, entonces, la longitud del cartón sería $20 - 2x$ y el ancho sería $10 - 2x$. Esto te dará una expresión para el volumen en términos de x.

$$f(x) = (20 - 2x)(10 - 2x)(x),$$

donde $f(x)$ representa el volumen.

Usando la Propiedad Distributiva podemos simplificar esta expresión

$$f(x) = (200 - 20x - 40x + 4x^2)(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$$

La Ilustración 1.16 muestra una gráfica de esta función junto con los cinco puntos de datos que establecimos en la gráfica.

Figura 1.16

1. **¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$?**
2. **¿Cuál es el alcance de la función $f(x)$?**
3. **¿Qué restricciones tú pondrías en el dominio si tú quisieras que los resultados proveyeran un modelo razonable para la relación entre el volumen y el tamaño del corte del cuadrado?**

4. **Calcula el volumen máximo del envase de cartón de la gráfica.**

5. **Calcula cuál tamaño del corte produciría un volumen máximo.**

6. **Haz una gráfica de la función $f(x)$ en tu calculadora. Usa la función TRACE para estimar el volumen máximo y el tamaño del corte que lo produce. ¿Está de acuerdo con el valor de la gráfica?**

La función $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x$ es una *función cúbica*. La gráfica es curva, pero no de la misma manera en que una parábola es curva. Una manera de describir una curva es mirar a sus *puntos de desviación*.

Frase a conocer: Un **punto de desviación** es un punto en la curva donde la curva cambia de dirección.

Por ejemplo, la curva deja de crecer y comienza a disminuir, o viceversa.

Una parábola tiene sólo un punto de desviación. La gráfica de una función cúbica tiene al menos dos puntos de desviación.

Utiliza tu calculadora para encontrar las coordenadas de los dos puntos de desviación para la función cúbica $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x$.

Si tú fueras a observar solamente una parte pequeña de la curva, esta característica pudiera no ser visible. Pero, es una característica de todas las curvas cúbicas. Más adelante en esta sección investigaremos otras funciones para ver si hay un patrón en sus puntos de desviación.

Las funciones cúbicas pueden ser usadas para hacer un modelo de una variedad de sucesos en el mundo real. Una doctora está haciendo una investigación con una droga particular y ella necesita conocer cómo la concentración de la droga en la sangre varía a través del tiempo. Tomando muestras de sangre y examinándolas, el equipo de investigación recopila los datos siguientes:

Tiempo (min.)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Concentración de la droga en mg/cc	0.82	0.88	0.93	0.97	1.0	1.0	0.96	0.89	0.77	0.60	0.37

Figura 1.17

Una gráfica de los datos se muestra en la Figura 1.18.

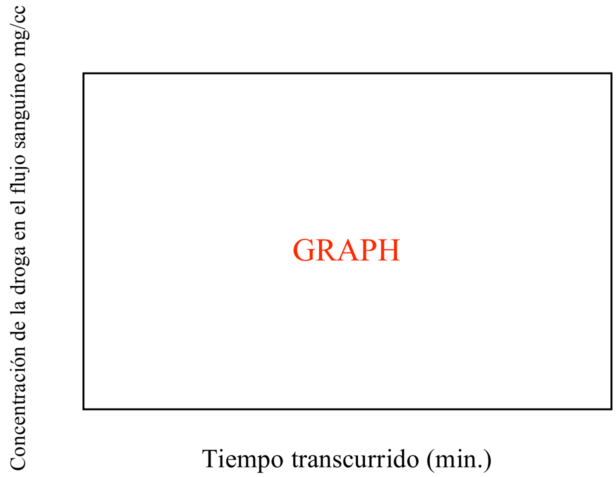

Figura 1.18

Estos datos no aparentan estar distribuidos simétricamente alrededor de ningún eje de simetría, de manera que no representa una función cuadrática. Anteriormente en **MATH** *Connections* utilizamos un proceso de ajuste de curva para las parábolas. Cuando utilizamos el mismo proceso con una función cúbica, el resultado es la mejor función cúbica ajustada (mostrada abajo) y su gráfica (Figura 1.19). La gráfica de la función

$$f(x) = -1.14x^3 + 0.114x^2 + 0.58x + 0.82$$

es mostrada para los puntos de datos para $0 \leq x < 1$.

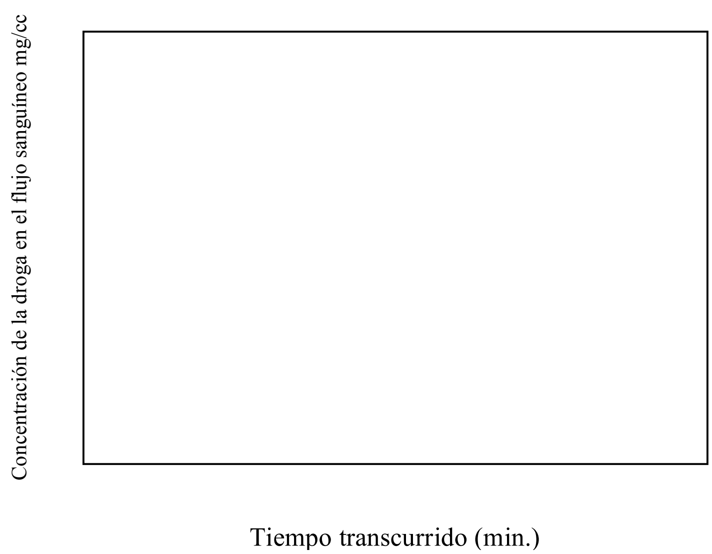

Figura 1.19

El ajuste aquí es excelente, y podemos ver la naturaleza ligeramente **asimétrica** de los datos. Algo que no es simétrico, es asimétrico. En la Figura 1.20 se muestra la misma gráfica, pero, esta vez, el dominio ha sido cambiado, de manera que la gráfica sea más visible. Ahora podemos ver la forma de esta función cúbica, la cual discutimos anteriormente. Sin embargo, todavía es importante recordar que esta función es solamente un buen modelo matemático, si el dominio de la variable es restringido a los valores reales entre 0 y 1, porque fuera de estos valores las concentraciones de sangre pronosticadas por la fórmula de función no tienen ningún significado.

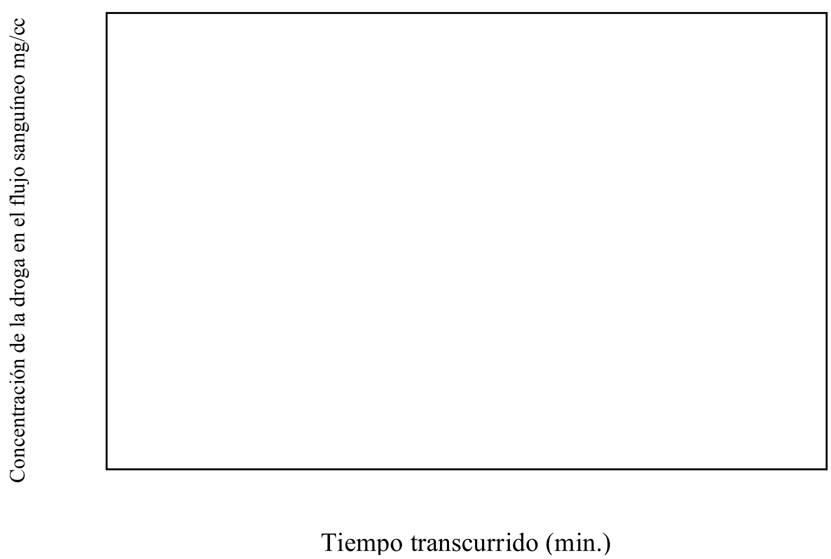

Figura 1.20

Las funciones cuadráticas y las funciones cúbicas son ambas ejemplos de un tipo de función más general de la función matemática conocida como la **función polinómica**. Esta es una función compuesta de varias potencias de una variable (digamos x), cada una multiplicada por algún valor. Aquí hay algunos ejemplos de funciones polinómicas:

$g(x) = x + 5$ $\qquad y = x^2 + 3x - 2$ $\qquad f(x) = x^4 - x^3 + 2$

Podemos representar los exponentes con la letra n (un número entero positivo) y cada coeficiente con la letra escrita como subíndice a.

Frases a conocer: Una **función polinómica** es una función que se puede escribir en la forma de

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n\,,$$

donde n es un número entero positivo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales. El número entero n es el valor numérico del término de la potencia mayor y es el **grado del polinomio**. El dominio de x consiste de todos los números reales.

Una función polinómica es dada por

$$\mathbf{f(x) = -1.2x^3 + 0.2x^2 + 0.55x + 0.82}$$

Indica

(a) el grado de la función

(b) los valores de a_0, a_1, a_2, a_4, a_{15}.

Muchos modelos matemáticos hacen uso de las funciones polinómicas aun cuando no esperes ninguna conexión entre la situación que estás interesado en estudiar y las matemáticas. Considera el siguiente ejemplo:

Como sociedad, cada vez estamos más conscientes del problema de los conductores que manejan los vehículos de motor bajo la influencia del alcohol. Hay límites legales para la concentración del alcohol en el flujo sanguíneo. Si una persona se encuentra sobre el límite legal, él o ella se considera que está intoxicada. Estos límites se dan en partes de 1 por ciento, así, por ejemplo, 0.10 significa una décima de un por ciento. Hasta recientemente, el límite legal variaba de estado en estado. Algunos grupos han abogado por un estándar nacional que provea diferencias en el límite legal, dependiendo de la edad y el tipo de conductor —camiones, vehículos de pasajeros, y así sucesivamente.

Escribe un párrafo de lo que tú piensas que debería contener una ley nacional uniforme sobre los límites legales. Incluye cualesquiera razones que tú creas para que el límite sea menor para los conductores comerciales que para los conductores de vehículos privados que estén sobre la edad legal para ingerir bebidas.

Ninguna función puede adecuadamente modelar la concentración de alcohol en el flujo sanguíneo a través del tiempo; sin embargo, una función que es una aproximación real es

$$f(x) = -0.0015x^3 + 0.1058x$$

La concentración de alcohol es una función del número de horas después de consumir una bebida alcohólica. El valor de la función (concentración de alcohol) es medido en décimas de un por ciento. La gráfica de la función está dada en la Figura 1.21.

GRAPH

Figura 1.21

1. (a) ¿Cuál es el grado del polinomio en la Figura 1.21?

(b) Enumera los varios coeficientes comenzando con a_3.

2. Usa tu calculadora de gráficas para contestar cada una de las siguientes:

(a) Haz una gráfica *f(x)* en la calculadora.

(b) Examinando la gráfica, indica el dominio y alcance de la función.

(c) Ahora, toma en consideración la situación de la vida real que la función está modelando. Indica lo que tú crees que serían el dominio restringido y el alcance. ¿Qué pieza de la gráfica es útil para nuestros propósitos? Agranda dicha parte de la gráfica.

(d) Recuerda que el modelo no predice para cada situación o para toda la gente en una situación particular. Basado en nuestro modelo, ¿cuánto tiempo después de comenzar a ingerir bebidas alcohólicas, estaría legalmente intoxicado, bajo la vieja ley (límite legal de 0.10), el conductor de un vehículo privado en California? ¿Por cuánto tiempo se mantendría esta persona legalmente intoxicada?

(e) Para un límite legal de 0.04, ¿cuánto tiempo después de comenzar a ingerir bebidas alcohólicas, estaría legalmente intoxicado el conductor de un camión? ¿Por cuánto tiempo se mantendría este conductor legalmente intoxicado?

(f) Ahora considera el límite legal de 0.08. ¿Cuánto tiempo después de comenzar a ingerir bebidas alcohólicas, estaría legalmente intoxicada una persona sobre la edad legal para ingerir dichas bebidas? ¿Por cuánto tiempo se mantendría esta persona legalmente intoxicada?

(g) Si el límite legal en Nueva Jersey fuera de 0.02, ¿cuánto tiempo después de comenzar a ingerir bebidas alcohólicas, estaría legalmente intoxicada una persona sobre la edad legal para ingerir dichas bebidas? ¿Por cuánto tiempo se mantendría esta persona legalmente intoxicada?

Como vimos anteriormente, no todos los puntos en una gráfica son igualmente importantes. A menudo, los puntos que indican cambios en el comportamiento son en los que nos enfocamos.

Refiriéndote a la gráfica en la Figura 1.21, contesta lo siguiente:

1. **Mientras el valor de x aumenta de 0 a 4, ¿qué ocurre con el valor de y?**
2. **Mientras el valor de x aumenta de 6 a 9, ¿qué ocurre con el valor de y?**
3. **Utiliza la función TRACE de tu calculadora para encontrar los puntos de desviación de la curva.**
4. **¿Qué información esto te provee sobre el nivel de alcohol en la sangre?**
5. **¿Cuál es la coordenada de otro punto en la curva que señala un cambio similar en el comportamiento de la curva?**
6. **Indica los valores de x donde la curva disminuye, aumenta y disminuye nuevamente.**
7. **La curva en la Figura 1.21 tiene dos puntos de desviación, (4.85, 0.342) y (−4.85, −0.342). Verifica que los valores que estableciste en tu calculadora estén cercanos a estos valores.**

EXPLORACIÓN

Anteriormente en la sección notamos que una parábola tiene un punto de desviación, y que una función cúbica tiene al menos dos puntos de desviación. En adición, una parábola puede intersecar el eje de x en tantos como dos puntos, mientras la función cúbica puede cortar el eje de x en tantos como tres puntos.

En la siguiente **Exploración** investigaremos lo que le ocurre a la gráfica de una función polinómica mientras el grado (el exponente más grande) del polinomio aumenta.

1. Haz una gráfica de cada una de las siguientes funciones en tu calculadora utilizando un marco WINDOW de $-7 \leq x \leq 7$ y $-5 \leq y \leq 5$. Dibuja una tabla similar a la tabla de abajo en tu cuaderno de notas como una manera conveniente de resumir tus hallazgos.

Función	**Grado**	**Cantidad de puntos de desviación**	**Cantidad máxima de intercección de *x***	**Dibujo de la curva**

Figura 1.22

2. Cada función fue construida de la anterior, añadiendo un término con un exponente mayor por uno.

(a) ¿Qué ocurre con el número de puntos de desviación cada vez que aumentamos el grado de la función por uno?

(b) ¿Qué ocurre con el número máximo de intercección de *x* cada vez que aumentamos el grado de la función por uno?

3. Conjetura sobre la relación entre el grado de una función polinómica y el número máximo de intercección de *x*.

4. Conjetura sobre la relación entre el índice de una función polinómica y la cantidad máxima de puntos de desviación.

5. La gráfica de la función

$$f(x) = x^7 - 24x^5 + x^4 + 149x^3 - 23x^2 - 126x + 126$$

está dada en la Figura 1.23.

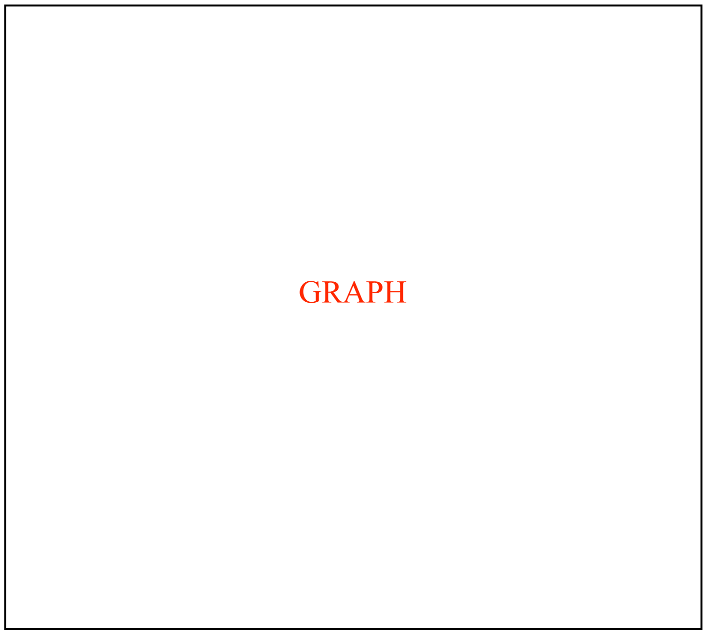

Figura 1.23

¿Confirma o refuta esta gráfica tus conjeturas? Explica.

Los matemáticos han extendido su entendimiento de estos patrones para permitir un entendimiento completo de las funciones polinómicas. Para nuestros propósitos éstas nos ayudan a tener una idea general de cuáles características tienen varias funciones polinómicas cuando se hacen gráficas de ellas.

Conjunto de ejercicios: 1.6

1. Una caja rectangular abierta tiene extremos cuadrados y un área de superficie de 8 pies cuadrados. Encuentra las dimensiones que producirían un volumen máximo.

2. La suma de la longitud y las dimensiones de los paquetes que van a ser enviados por primera clase no debe exceder las 72 pulgadas. La dimensión es definida como la distancia más corta alrededor del paquete. Asumiendo que el paquete que se va a enviar es una caja larga y estrecha con extremos cuadrados, encuentra el volumen máximo que puedes enviar en primera clase.

3. Encuentra las dimensiones de la caja rectangular más grande con una base cuadrada y sin tapa que se pueda hacer con 675 pulgadas cuadradas de material.

4. En la Meseta Kaibab, en Arizona, las autoridades de la vida silvestre mantuvieron récords de la población de venados, sobre un período de 25 años. Durante un tiempo la población creció, pero, los limitados recursos alimenticios y otros factores, que afectan los rebaños grandes ocasionaron un descenso poblacional. Se desarrolló una función de estos datos, donde x es el número de años desde el comienzo de la recopilación de datos, y la población de venados está representada en un momento dado por

$$D(x) = -0.125x^5 + 3.125x^4 + 4000$$

   (a) Haz una gráfica de la función.

   (b) ¿Sobre qué período de años la población estuvo aumentando? ¿Por cuánto tiempo estuvo algo estable? ¿Por cuánto tiempo estuvo disminuyendo?

5. Haz una gráfica de las siguientes funciones polinómicas y determina la cantidad de puntos de desviación para cada una.

   (a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

   (b) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

   (c) $f(x) = 3x^4 - 14x^3 + 54x - 3$

   (d) $f(x) = -x^5 + 4$

6. Un rectángulo es dibujado dentro de la parábola $y = 12 - x^2$ de manera que las dos esquinas de la parte de abajo están en el eje de x y las dos de arriba están en la curva. ¿Cuál es el área máxima posible de dicho rectángulo?