

1.7 Encontrando el inverso

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Demstrar comprensión del concepto del inverso de una función

Encontrar el inverso de una función algebraica

Encontrar el inverso de una función gráfica

Decidir si el inverso de una función es una función

Aplicar el concepto del inverso a situaciones de la vida cotidiana.

Anteriormente, en **MATH Connections**, usamos los inversos de las funciones trigonométricas para determinar las medidas de los ángulos. Recuerda que el seno $30^\circ = 0.5$ y el seno⁻¹ $0.5 = 30^\circ$, de manera que seno⁻¹ $n = x$ y el seno $x = n$.

Echemos un vistazo a la función $y = \text{seno } x$ y su operación inversa.

PLACE EQUATION HERE

Notamos que los valores de x y y están intercambiados para el inverso de la función del seno. Veamos si esta relación trabaja para una función lineal.

Veamos algunos valores para $y = 2x + 3$ donde x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

PLACE EQUATION HERE

Ahora, intercambiamos los valores para x y y para encontrar la función inversa de $y = 2x + 3$. Cuando sustituimos 3, 7 y 11 para y obtenemos 0, 2, 4 para x . En este caso el inverso de y es la variable independiente y x es la variable dependiente. Cuando trazamos los puntos (3, 0), (7, 2) y (11, 4) estos aparentan estar en una línea.

PLACE EQUATION

Encontremos la ecuación de esa línea.

inverso de $y = mx + b$

$$m = \frac{2-0}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

inverso de $y = \frac{1}{2}x + b$, prueba (3, 0)

$$0 = \frac{1}{2}(3) + b, \text{ por lo que } b = \frac{-3}{2}$$

y el inverso de $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{x-3}{2}$

¿Cuál es la relación de (1) $y = 2x + 3$ y (2) $y = \frac{x-3}{2}$?

Sí, estos son inversos. Si $x = 10$ en (1), $y = 23$. Si $x = 23$ en (2), $y = 10$.

Anteriormente en el capítulo usamos la función lineal $y = 15x + 10,000$ donde x era la cantidad de libros impresos y y era el costo total por imprimirlos.

Echemos una ojeada a los pares ordenados de esta función (1000, 25,000) y (2000, 40,000). Para obtener el inverso intercambiamos los valores y obtenemos (25,000, 1000) y (40,000, 2000) y determinamos la ecuación lineal.

$$m = \frac{2000 - 1000}{40,000 - 20,000} = \frac{1000}{15,000} = \frac{1}{15}$$

$$y = \frac{1}{15}x + b$$

$$2000 = \frac{1}{15}(40,000) + b$$

$$30,000 = 40,000 + 15b$$

$$-10,000 = 15b, \text{ y } b = \frac{x - 10,000}{15}$$

$$y = \frac{1}{15}x + \frac{-10,000}{15} = \frac{x - 10,000}{15}$$

Por lo que el inverso de $y = 15x + 10,000$ es $y = \frac{x - 10,000}{15}$

1. **Calcula el costo total para imprimir 700 anuarios.**
2. **Calcula cuántos anuarios podrías imprimir con la cantidad de \$20,500.**
3. **Explica lo que encontraste.**
4. **Si el dominio de $y = 15x + 10,000$ es $\{200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000\}$, ¿cuál es su alcance?**
5. **Cada elemento del alcance de la función original es un costo total. Usa cada uno de estos costos totales y la ecuación del inverso para encontrar qué valor corresponde a cada uno de los anuarios. Explica lo que encuentres.**



Este método para encontrar el inverso de una función lineal da mucho trabajo. Hay una manera más fácil. Si tomamos la ecuación que define el inverso,

$$y = \frac{x - 10,000}{15}$$

y multiplicamos cada lado por 15 vamos a obtener la siguiente ecuación

$$15y = x - 10,000$$

Añadiendo 10,000 a cada lado se produce entonces la ecuación

$$x = 15y + 10,000$$

Si tú comparas esta ecuación con la original, aparenta ser solamente la original con la x y la y intercambiadas. Y, como descubriste arriba, el dominio de la función original es el alcance del inverso y viceversa. A menudo, el inverso de la función

$$y = f(x)$$

es denotado por

$$y = f^{-1}(x)$$

En este caso escribiríamos lo siguiente

$$f(x) = 15x + 10,000$$

y

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 10,000}{15}$$



- 1. Copia la tabla de abajo en tu cuaderno de notas y complétala, usando la función $y = 15x + 10,000$.**

x	100	200	50	1000	500
y					

Figura 1.24

- 2. Copia la tabla de abajo en tu cuaderno de notas y complétala, usando la función**

$$y = \frac{x - 10,000}{15}$$

x	11,500	13,000	10,750	25,000	17,500
y					

Figura 1.25

- 3. ¿Cómo los pares ordenados para la función comparan con los pares ordenados para el inverso de la función?**
- 4. ¿Confirma este resultado el patrón para encontrar el inverso de la manera más rápida? Explica.**

Dato a conocer: Para encontrar el **inverso de una función** $y = f(x)$, escribe $x = f(y)$ (esto es, intercambia la x y la y en la ecuación original). Resuelve entonces, la ecuación resultante para y para producir $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo: Para encontrar el inverso de $y = x + 2$, intercambia x y y ($x = y + 2$), luego, resuelve para y . De manera que el inverso es $y = x - 2$.

1. Usa este método para encontrar el inverso de $y = 3x - 5$.
 - (a) Intercambia x y y para producir la forma $x = f(y)$.
 - (b) Resuelve la ecuación para y .
 - (c) Provee la ecuación para definir $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.
2. Encuentra el inverso de cada una de las siguientes en la forma de $x = f(y)$, y luego, en la forma de $y = f^{-1}(x)$.
 - (a) $f(x) = 4x + 7$
 - (b) $y = -2x + 5$
 - (c) $f(x) = x^2 + 3$
 - (d) $y = -x^2 - 1$



Hemos visto como una función y su inverso están relacionados algebraicamente; examinemos ahora cómo están relacionadas gráficamente.

1. Haz una gráfica de la función $y = 2x + 3$.
2. Encuentra el inverso de esta función en la forma $y = f^{-1}(x)$, y luego, dibuja su gráfica.
3. Haz la gráfica $y = x$.
4. Describe en tus propias palabras la relación entre la gráfica de la función original, la gráfica del inverso y la línea $y = x$.
5. ¿Cuál de las tres líneas en tu gráfica se comporta como un eje de simetría para las otras dos líneas? Explica.



Dato a conocer: La gráfica del inverso de una función es un reflejo exacto de la gráfica de la función en la línea $y = x$.

Consideremos otro ejemplo de una función y su inverso. La función cuadrática $y = x^2$ tiene un inverso definido por $x = y^2$ ó $y = \pm \sqrt{x}$. Estas dos curvas se muestran a lo largo con la línea $y = x$ en la Figura 1.26.

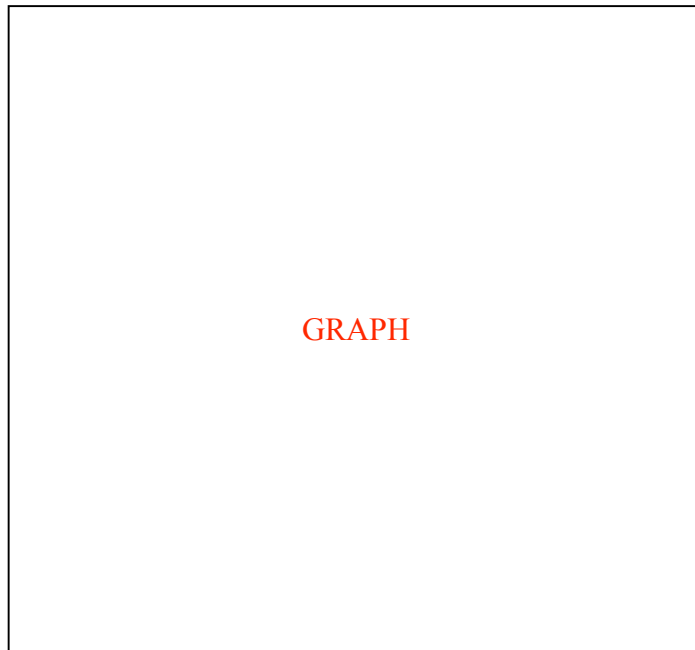


Figura 1.26



1. **¿Son la función cuadrática $y = x^2$ y su inverso, reflejos sobre la línea $y = x$?**
2. **¿Es el inverso de la función cuadrática $y = x^2$ una función? Explica.**
3. **¿Cuál es el eje de simetría para la función y su inverso?**

Este ejemplo levanta un punto muy importante, a saber, que aunque usualmente podemos encontrar el inverso de una función, no siempre va a ser una función. De hecho, el inverso de una función será solamente una función si la función original es una **función de uno-a-uno**. La función cuadrática $y = x^2$ no satisface esta condición porque los puntos $(2, 4)$ y $(-2, 4)$ están ambos en la curva y dos valores diferentes de x tienen el mismo valor de y . Una manera fácil para reconocer si una función es una función de uno-a-uno es comprobar si una línea horizontal puede intersectar la gráfica una sola vez. Si lo hace, es una función de uno-a-uno.

Términos a conocer: Una **función de uno-a-uno** es una función donde sólo un valor x es pareado con un valor particular de y .

Otra manera de determinar si una función es una función de uno-a-uno es si una línea horizontal interseca la gráfica al menos en un punto. También aprenderás que una función tiene una función inversa *sí y sólo sí* cada línea horizontal interseca la gráfica de una función en, al menos, un punto.

En esta sección hemos mostrado cómo encontrar el inverso de una función. Como vimos con la función que modeló el costo total de los anuarios, el inverso es útil, porque, quiere decir que podemos utilizar nuestros modelos matemáticos para contestar preguntas de diferentes maneras, dependiendo de la información que se nos provea y la información que tenemos que buscar. En la próxima sección continuaremos observando los modelos matemáticos, esta vez, aquéllos que no son funciones polinómicas.

Conjunto de ejercicios: 1.7

1. ¿Cuáles de estas son funciones de uno-a-uno? Explica.
 - (a) $y = 4 - 2x^2$
 - (b) $y = *|x + 4|*$
 - (c) $f(x) = x^5 + 10$
 - (d) $f(x) = 4$
 - (e) $y = x^3 - 2$
 - (f) $f(x) = 3x + 7$
2.
 - (a) Indica el inverso de cada una de las funciones en el problema 1 en la forma $x = f(y)$.
 - (b) Indica el inverso de (a) y (f) en la forma $y = f^{-1}(x)$.
 - (c) ¿Cuál de los inversos de las funciones en el problema 1 son funciones? Explica.
3. Un libro para niños cuenta de un estanque cubierto con hojas de lirios de agua. Nos dice que la cantidad de hojas de lirios de agua se duplica cada mes, y le toma diez meses al estanque cubrirse completamente.
 - (a) Comenzando con dos hojas de lirios de agua, escribe una ecuación para la cantidad de lirios en el estanque después de cualquier cantidad de meses, n . ¿Es ésta una función? Si es así, cuál es su dominio? Si no es así, explica por qué no.

- (b) Asumiendo que el estanque está lleno ahora, ¿cuántos meses hace que el estanque se encontraba medio lleno? ¿Una octava parte lleno?
- (c) ¿Cuántas hojas de lirios de agua había en el estanque cuando éste se encontraba lleno a la mitad?
4. Un cajero se encontraba llenando un recibo de una tarjeta de crédito con las compras en la primera línea, el impuesto de venta de 5% en la segunda línea, y la cantidad total en la tercera. Desafortunadamente, la caja registradora se atascó y lo único que él podía leer era la cantidad total. Su amigo que trabaja en la tienda sugirió que sólo tomara el 5% del total y lo restara para obtener el costo de las compras.
- (a) ¿Estás de acuerdo con el consejo de su amigo? Explica.
- (b) Encuentra una función de x que represente el total si x representa el valor de las compras.
- (c) Escribe el inverso de esta función para representar el valor de las compras donde x es el total.
- (d) Encuentra la suma de las compras para que el cajero lo escriba en el recibo de la tarjeta de crédito, si el total en la cinta de la caja registradora era de \$44.63.
- (e) Usa ahora el método del amigo del cajero para encontrar el valor de las compras. ¿Está de acuerdo con la contestación que encontraste en (d)? Explica.
5. Encuentra el inverso de la función $y = 5$. ¿Es el inverso una función? Explica.
6. Considera la función $y = x^2, x \geq 0$.
- (a) Indica el dominio y alcance para esta función.
- (b) Indica la ecuación que define el inverso en la forma de $y = f^{-1}(x)$.
- (c) Indica el dominio y alcance para el inverso.
- (d) ¿Es el inverso una función? Explica.