

## 1.8 Valor de las funciones recíprocas y absolutas

Al comienzo de este capítulo examinamos un problema que tenía el comité de anuario de la Escuela Grand Ridge para establecer un precio para el anuario. Este problema nos llevó a la discusión de las funciones cuadráticas y una variedad de otros tópicos matemáticos. Volvamos ahora al mismo problema y examinemos otra dimensión.

Recuerda que el costo para imprimir los anuarios estaba dado por la ecuación  $y = 15x + 10,000$ , donde  $y$  es el costo total y  $x$  es la cantidad de anuarios impresos. Esto permitió al comité calcular el costo total para cualquier cantidad de anuarios. Un nuevo miembro del comité, de nombre Stephan, tiene una pregunta diferente: “Yo sé cuál es el costo total para imprimir los anuarios, pero, ¿cuál es el costo por copia para imprimir el anuario?”

1. **Para ayudar a contestar la pregunta de Stephan, copia la tabla de la Figura 1.27 en tu cuaderno de notas, y complétala.**

Cantidad	10	50	500	1000	1500	2000	5000	10,000	20,000
Costo total									
Costo por copia									

Figura 1.27

2. **Dibuja una gráfica, usando el costo por copia en el eje de  $y$ , y la cantidad de anuarios impresos en el eje de  $x$ . ¿Es ésta una gráfica lineal?**
3. **¿Es ésta una gráfica de una función cuadrática? Si es así, explica por qué. Si no es así, explica por qué no.**
4. **¿De qué manera(s) es ésta gráfica semejante a, o diferente de las gráficas que has visto anteriormente en este capítulo?**
5. **Trata de dibujar una curva suave a través de los puntos en tu gráfica. ¿Forman estos puntos una función? Si es así, ¿cuáles son su dominio y alcance? Si no es así, explica por qué no.**

### Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Identificar las gráficas de las funciones recíprocas

Identificar las gráficas de las funciones con valores absolutos

Aplicar las transformaciones de estas gráficas de estas funciones

Desarrollar un modelo matemático para la relación entre las ventas y las ganancias.



Examinemos esta misma situación algebraicamente. En la gráfica, tú dividiste el costo total por la cantidad de copias para encontrar el precio por copia. Esto significa que el *precio por copia* ( $y$ ) es definido por una ecuación nueva,

PLACE EQUATION HERE

Recuerda que una función polinómica puede ser escrita como la suma de los términos con exponentes de números enteros. Por consiguiente, la ecuación

PLACE EQUATION HERE

no es una función polinómica, porque puede ser escrita como

PLACE EQUATION HERE

Nota que el exponente de la variable no es un número entero. A funciones como esta, donde la variable es el denominador de una fracción, se les conoce como **funciones recíprocas**.



1. **Haz una gráfica de la función**

PLACE EQUATION HERE

en tu calculadora para  $0 \leq x \leq 500$  y  $0 \leq y \leq 500$ . La gráfica debe parecerse a la de la Figura 1.28.

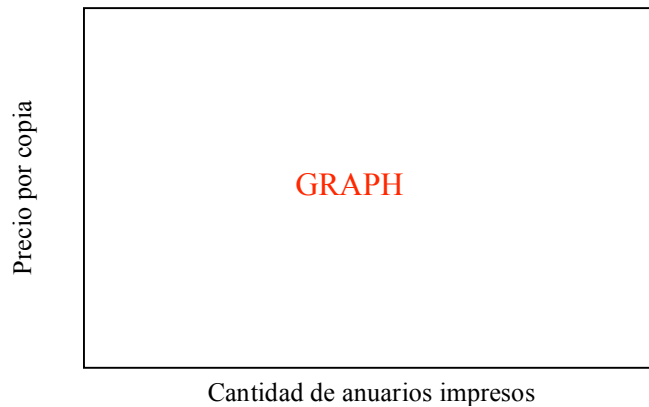


Figura 1.28

2. **Al aumentar la cantidad de anuarios ordenados, ¿qué ocurre con el precio de cada copia? ¿Hay algún límite para esta tendencia?**
3. **Al disminuir la cantidad de anuarios ordenados, ¿qué ocurre con el precio de cada copia? ¿Hay algún límite para esta tendencia? Explica.**
4. **¿Dónde la curva interseca el eje de  $x$ ? Explica.**

**5. ¿Dónde la curva interseca el eje de y? Explica.**

Si fuéramos a hacer la gráfica de la función

$$y = 15 + \frac{10,000}{x}$$

sin tener en cuenta su significado en la vida real, usaríamos los valores de  $x$  que eran negativos. Entonces la gráfica se parecería a la gráfica mostrada en la Figura 1.29.

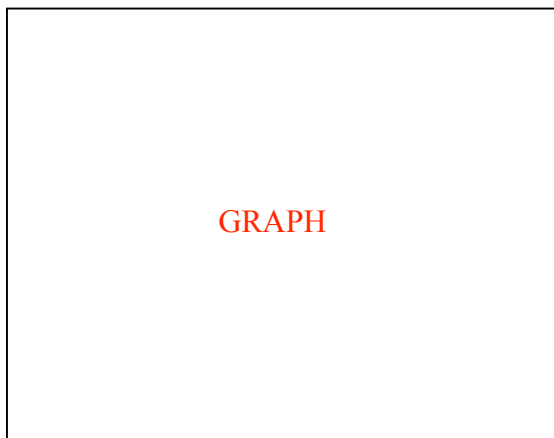


Figura 1.29

Examinemos la función  $y = 15 + \frac{10,000}{x}$

1. ¿Cuáles son los valores de  $y$  cuando  $x = 1; 10; 10,000; 1,000,000$ ?
2. ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando  $x$  es extremadamente grande, digamos  $10^{20}$ ?
3. ¿Será el valor de  $x$ , cero, alguna vez? Explica.
4. ¿Será el valor de  $y$  alguna vez, menor o igual que 15? Explica.
5. ¿Cuáles son los valores de  $y$  cuando  $x = 1; 0.1; 0.00001$ ?
6. ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando  $x$  es extremadamente pequeño, digamos  $10^{-10}$ ?
7. ¿Podrá ser  $x$ , alguna vez, igual a cero en la ecuación (función)? Explica.
8. ¿Cuál es el valor más grande que  $y$  igualaría?
9. Examina tu gráfica de la función  $y = 15 + \frac{10,000}{x}$ . ¿Cómo esta gráfica compara con los resultados de las preguntas 1-8?

**Términos**

La palabra *asíntota* podría venir de la palabra griega *asumptōtos*, que quiere decir, no cumplir.

La gráfica de la función nunca intersectará la línea  $y = 15$ , aunque se le acercará mucho mientras  $x$  se torna muy grande. Por ejemplo,  $y = 15.001$  cuando  $x = 10,000,000$ . A la línea  $y = 15$  se le conoce como una *asíntota horizontal*. Igualmente, la curva nunca intersectará el eje de  $x$ , aún cuando se le acerque más y más, mientras  $x$  se aproxime a un valor de 0. Para esta función, al eje de  $x$  se le conoce como una *asíntota vertical*.

**Términos a conocer:** La **asíntota horizontal** de la curva  $y = f(x)$  es una línea horizontal donde la curva se le acerca, pero, nunca interseca, mientras  $x$  se vuelve infinitamente grande en la dirección positiva o negativa.

La **asíntota vertical** de una curva  $y = f(x)$  es una línea vertical donde la curva se le acerca, pero, nunca interseca, mientras  $y$  se vuelve infinitamente grande en la dirección positiva o negativa.

Estas características son unas que no hemos visto anteriormente en las funciones que hemos estudiado, y éstas podrían parecer un poco inusuales. Vale la pena recordar que esta función “inusual” surgió del examen de una situación de la vida real. Esto es muy común en las aplicaciones de negocios, después de comenzada la producción, donde hay un costo inicial grande, seguido por costos por artículo menores. Por ejemplo, puede costar millones de dólares desarrollar un circuito integrado, pero, una vez éste es desarrollado, los materiales para producirlo podrían costar unos pocos dólares. Es por esta razón que los precios disminuyen cuando se producen productos en grandes cantidades.



La función recíproca básica  $f(x) = \frac{1}{x}$  donde  $x \neq 0$  puede

ser considerada también, examinando cómo conseguiríamos una gráfica, de una gráfica más familiar tal como la gráfica definida por  $g(x) = x$ . Si miramos ahora la función recíproca, estamos examinando  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  donde  $g(x) \neq 0$ .

1. Cuando  $g(x) = 1$ , ¿cuál es el valor de  $f(x)$ ?
2. Cuando  $g(x) = -1$ , ¿cuál es el valor de  $f(x)$ ?
3. Cuando el valor de  $g(x)$  es muy grande, ¿qué es cierto sobre  $f(x)$ ?
4. Cuando el valor de  $g(x)$  es muy pequeño, ¿qué es cierto sobre  $f(x)$ ?

La gráfica de  $y = x$  es mostrada en la Figura 1.30 como una línea entrecortada.

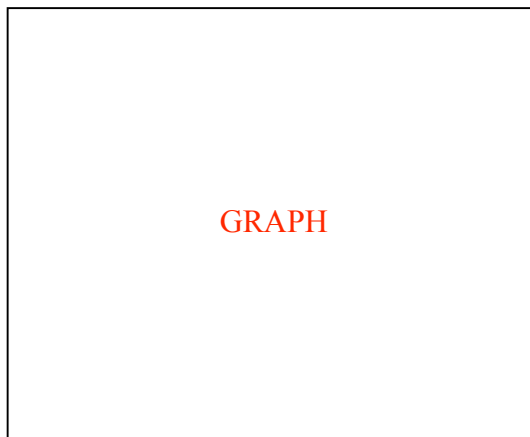


Figura 1.30

Examina cuidadosamente la gráfica en la Figura 1.30. Cualesquiera puntos donde están marcados los valores de  $y$  como 1 ó  $-1$ , porque éstos son los mismos después que tomamos el recíproco. Así que, la curva de la función recíproca pasará a través de estos puntos.

- Los puntos donde el valor de  $x$  está entre 0 y 1 tienen valores  $y$  positivos pequeños; los puntos en el recíproco tendrán valores  $y$  positivos grandes.
- Los puntos donde el valor de  $x$  está entre  $-1$  y 0 tienen valores  $y$  negativos pequeños; los puntos en el recíproco tendrán valores  $y$  negativos grandes.
- Los puntos donde  $x > 1$  tienen valores  $y$  positivos que están aumentando; los puntos en el recíproco tendrán valores  $y$  que están disminuyendo.
- Los puntos donde  $x < -1$  tienen valores  $y$  negativos que se vuelven cada vez más negativos; los puntos en el recíproco tendrán valores  $y$  negativos, cuyo valor absoluto está disminuyendo.

Se deduce que el eje de  $x$  es una asíntota horizontal. Cuando  $y = 0$ , el recíproco es indefinido, y la función recíproca no puede tener un valor cuando  $x = 0$ . Así, el eje de  $x$  es una asíntota vertical. La gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$  puede ser dibujada considerando estas ideas. Esta es la curva sólida en la Figura 1.30.



1. Haz una gráfica de la función  $y = x^2 - 4$ .
2. ¿Para cuál(es) valor(es) de  $x$  es la función cero?
3. ¿Para cuál(es) valor(es) de  $x$  es el recíproco de esta función indefinido?
4. ¿Para cuál(es) valor(es) de  $x$  es el recíproco de esta función mayor que 1?
5. ¿Para cuál(es) valor(es) de  $x$  es el recíproco de esta función positivo y menor que 1?
6. ¿Para cuál(es) valor(es) de  $x$  es el recíproco de esta función negativo?
7. ¿Para cuál(es) valor(es) de  $x$  es el recíproco de esta función positivo?
8. La Figura 1.31 muestra las gráficas de la función cuadrática  $y = x^2 - 4$  y su recíproco  $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ . Busca las coordenadas de cada uno de los puntos rotulados  $A, B, C, D, E$  y  $F$ .
9. Haz una gráfica de la función  $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ .  
Compara tu gráfica con la gráfica de la Figura 1.31. Explica lo que ves.

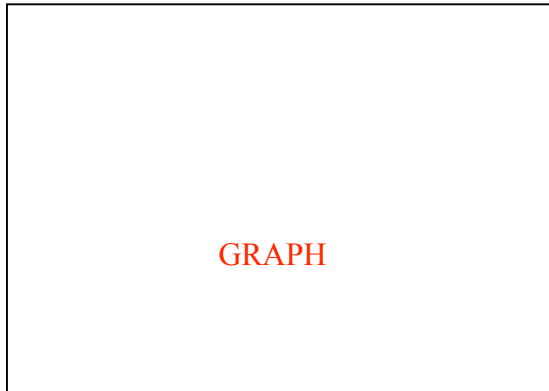


Figura 1.31

Anteriormente aprendiste cómo cambiar la forma de una parábola transformando la ecuación. Veamos si los mismos principios se pueden aplicar a la función recíproca.

1. **Haz una gráfica de cada una de las siguientes en tu calculadora. Usa  $-5 \leq x \leq 5$  y  $-5 \leq y \leq 5$ . Deja todas las gráficas en la pantalla. Deja todas las gráficas en la pantalla.**



(a)  $y = \frac{1}{x}$

(b)  $y = 3\left(\frac{1}{x}\right)$

(c)  $y = 3\left(\frac{1}{x}\right) + 2$

- (d) **¿Cómo la gráfica en 1(c) compara con la gráfica de 1(a)? Explica.**

- (e) **¿Cómo la gráfica en 1(c) compara con la gráfica de la Figura 1.29? Explica.**

El mismo principio que utilizamos para transformar las parábolas puede ser usado también, para ajustar las formas de los recíprocos y otras funciones.

Otro asunto que salió a relucir en la discusión sobre los precios del anuario, fue la idea propuesta por José de que, al aumentar el precio, el volumen de ventas disminuye. En muchos casos, este principio es cierto mientras los consumidores dejen de comprar los bienes que ellos entienden son muy caros. Sin embargo, es cierto además, que los consumidores a menudo dejan de comprar bienes que son económicos, porque los perciven como “baratos” y de calidad pobre.

La Compañía de Electrónicos Santron hace un tocador de CD portátil y pequeño. Encontraron que la cantidad vendida (por lotes de 10,000) varía mientras se cambia el precio de venta. Los datos recogidos por su división de mercadeo está provista en la Figura 1.32.

Precio (\$)	Ventas (en 10,000)



Figura 1.32

En la Figura 1.33 se muestra una gráfica con estos datos. ¿Qué tipo de relación sugerirías existe entre el precio y las ventas?

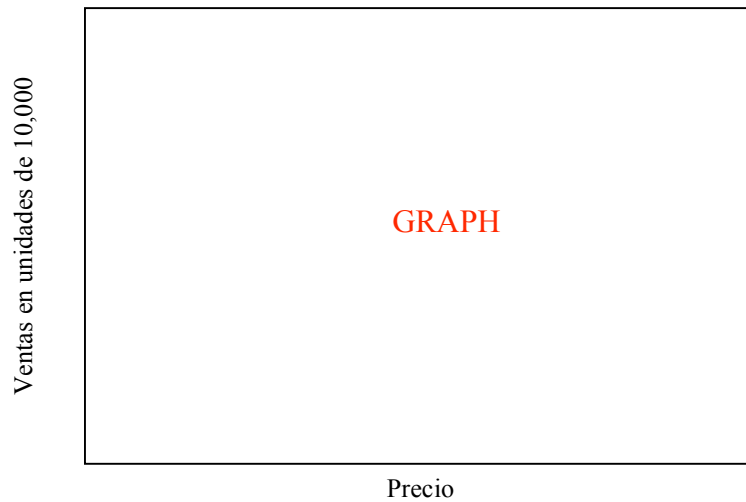


Figura 1.33

Los datos no mienten en una curva parabólica, aunque tiene el mismo patrón general de subida y bajada. La función ilustrada en la Figura 1.31, se ajusta adecuadamente a los datos de la gráfica, pero, ¿qué tipo de modelo matemático produciría dicha gráfica inusual?

Nuevamente, el álgebra nos puede mostrar qué ocurre realmente en esta situación. La gráfica muestra que está claro que el mejor precio de venta del tocador de CD es de \$20, si queremos elevar al máximo el volumen de ventas. Las desviaciones en este precio, ya sea hacia arriba o hacia abajo, ocasionan una disminución en las ventas. Por consiguiente, no estamos interesados si el precio es sobre o bajo los \$20, sino solamente en cuánta diferencia hay. Si el precio de venta de nuestro tocador de CD es  $x$ , entonces, lo que queremos saber es, “¿Cuán alejado de \$20 está el precio, independientemente de la dirección?” Podemos usar valores absolutos para expresar esto como  $|20 - x|$ .



1. Evalúa  $|20 - x|$  si  $x$  (precio de venta) es  
 (a) 21    (b) 12    (c) 30    (d) 18    (e) 19    (f) 32
2. Observando la gráfica de la Figura 1.33, ¿cuánto disminuyeron las ventas cuando el precio cambió de \$20 a \$10?
3. ¿Cuál es el ritmo de cambio en el volumen de ventas por el cambio de \$1 en el precio?

La gráfica ilustra que cada cambio en el precio de \$1 resulta en una baja en el volumen de ventas de 1 unidad (10,000). Sabemos también que con un precio de \$20 por cada tocador de CD, el volumen de ventas es de 10 unidades (100,000). Podemos establecer ahora una ecuación que puede actuar como un modelo matemático para el comportamiento de los consumidores con respecto a este producto. El volumen de ventas en unidades de 10,000 tocadors de CD ( $y$ ) es relacionado al precio ( $x$ ) por la ecuación  $y = 10 - *20 - x*$ .

1. **Haz una gráfica de la función  $y = 10 - *20 - x*$  junto con los datos de la tabla anterior. ¿Pasa la función a través de todos los puntos de los datos?**
2. **¿Cuáles son el dominio y el alcance de la función?**
3. **¿Qué restricciones pondrías al dominio y al alcance si este fuera a ser un modelo razonable para la relación entre las ventas y las ganancias?**
4. **Haz una gráfica de cada una de las siguientes en tu calculadora. Deja todas las gráficas en la misma pantalla. Posiciona WINDOW para  $x$  y  $y$  de  $-40$  a  $40$ , y  $x$  y  $y$  scl =  $5$** 
  - (a)  $y = *x*$
  - (b)  $y = *x - 20*$
  - (c)  $y = -*x - 20*$
  - (d)  $y = -*20 - x* + 10$
  - (e) **Explica por qué  $*20 - x* = *x - 20*$ .**
  - (f) **¿Cómo la gráfica en (d) compara con la gráfica en la pregunta 1 mostrada arriba? Explica.**



Las funciones con valores absolutos pueden ser pensadas de otra manera. Dado que el valor absoluto es siempre no negativo, éste actúa como un filtro positivo para la función. El mismo dejará los valores de las funciones positivas y de cero sin cambiar y hará positivos los valores de funciones negativas. En otras palabras, cualquier punto en la gráfica que tenga una coordenada de  $y$  negativa, tendrá la coordenada de  $y$  cambiada a un valor positivo. Cualquier punto con una coordenada de  $y$  positiva o cero permanecerá sin cambios.

Considera cómo esta idea puede ser usada para establecer la gráfica de  $y = *x*$  de la gráfica de  $y = x$ . La Figura 1.34 muestra la gráfica de  $y = x$ . Todos los puntos en la línea  $y = x$  sobre el eje de  $x$  (esto es, los valores  $y$  de la función son positivos) se mantienen sin cambios. Todos los puntos en la línea  $y = x$  debajo del eje de  $x$  (esto es, los valores de la función  $y$  son negativos) son cambiados de manera que sus valores  $y$  se vuelven positivos.

Así que, por ejemplo, el punto  $(-2, -2)$  se convierte en  $(-2, 2)$  y el punto  $(-4, -4)$  se convierte en  $(-4, 4)$  y así sucesivamente. Si hacemos este cambio para todos los puntos en  $y = x$  debajo del eje de  $x$ , la gráfica de  $y = |x|$  es la línea sólida como resultado de esto.

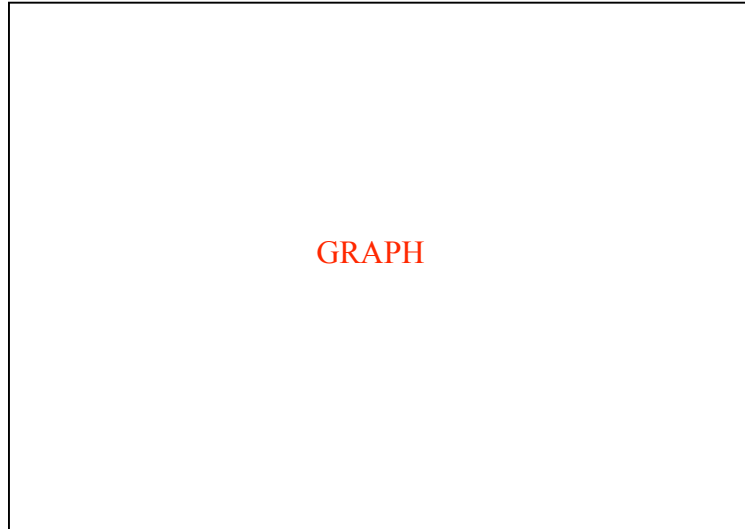


Figura 1.34

Cada punto que se encontraba debajo del eje de  $x$  tiene ahora la misma cantidad de unidades arriba que las que tenía debajo. Esto es lo mismo que mirarse en un espejo. Tu imagen parece estar tan lejos detrás del espejo como tú estás frente a él. Así que, podemos mirar el valor de la función absoluta como un espejo que refleja todo debajo del eje de  $x$  como estando arriba del eje de  $x$ . Podrías pensar en el eje de  $x$  como si fuera un espejo.



1. **Haz un dibujo de la gráfica  $y = x + 3$  y  $y = |x + 3|$ .  
Usa tu calculadora para verificar tus gráficas.**
2. **Haz un dibujo de la gráfica  $y = 2x + 3$  y  $y = |2x + 3|$ .  
Usa tu calculadora para verificar tus gráficas.**
3. **Haz una gráfica con tu calculadora de  $y = -x^2 + 9$  y  $y = |-x^2 + 9|$ . Explica lo que notas.**
4. **Haz una gráfica con tu calculadora de  $y = x^2 + 4$  y  $y = |x^2 + 4|$ . Explica lo que notas.**

Uno de los aspectos útiles de mirar a la función de valor absoluto de esta manera es que podemos hacer gráficas de otras funciones más complicadas que envuelven el valor absoluto considerando lo que ocurre a una gráfica conocida.

Por ejemplo, la gráfica  $y = -(x - 2)^2 - 3$  tiene los mismos valores negativos que la gráfica de  $y = (x - 2)^2 - 3$ , pero, los valores negativos de  $y = (x - 2)^2 - 3$  son reflejados sobre el eje de  $x$  y son no negativos para  $y = -(x - 2)^2 - 3$ . El vértice de la parábola resultante al hacer una gráfica de la función  $y = (x - 2)^2 - 3$  es  $(2, -3)$ , y la parábola se abre. Esta es la línea de puntos en la Figura 1.35. La gráfica de  $y = -(x - 2)^2 - 3$  es la línea sólida en la Figura 1.35. El punto  $(2, 3)$  de esta función es la reflexión del vértice  $(2, -3)$  de la función original.

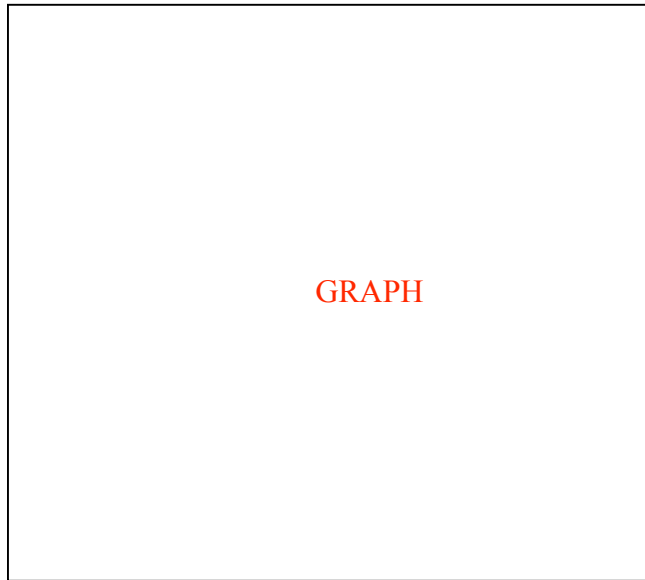


Figura 1.35

## REFLEXIONA

En este capítulo hemos investigado una cantidad de situaciones de la vida real. En cada caso fuimos capaces de construir un modelo matemático que nos ayudó a describir lo que estaba ocurriendo. En el curso de estas investigaciones hemos aprendido sobre la función cuadrática y las maneras para conseguir las raíces de una ecuación cuadrática. También hemos visto las interpretaciones geométricas de las raíces de una ecuación cuadrática. Hemos explorado las formas generales y las características de las funciones cúbicas y otras funciones polinómicas. Hemos aprendido cómo encontrar una función inversa y cómo decidir si el inverso de esa función puede ser también una función. Finalmente, se introdujeron los valores de las funciones recíprocas y absolutas, como dos ejemplos de funciones no polinómicas, que pueden actuar aún, como modelos matemáticos para algunas situaciones de la vida real.

### Conjunto de ejercicios: 1.8

1. Sin hacer una gráfica, indica el vértice, la dirección de la apertura, y la ecuación del eje de simetría para cada una de las siguientes:
  - (a)  $y = x^2 - 3$
  - (b)  $y = 2x^2 - 1x + 2$
  - (c)  $y = -3x^2 + 3x - 2$
2.
  - (a) Busca los puntos de intersección de las funciones  $y = x^2 + 3$  y  $y = -2x^2 + 1x + 12$ .
  - (b) Sustituye los valores de  $x$  que encontraste en la ecuación  $x^2 + 3 = -2x^2 + 1x + 12$ .
  - (c) ¿Satisfacen estos la ecuación? Explica.
3. Resuelve la ecuación  $x^2 + 2 = 3x + 2x$ .
4. Para cada una de las funciones
  - (a)  $f(x) = 10 + \frac{3}{x}$  y (b)  $y = \frac{1}{x-4} + 3$ , indica
    - el dominio
    - el alcance
    - la asíntota vertical
    - la asíntota horizontal
5.
  - (a) Sin utilizar tu calculadora, dibuja la gráfica de  $y = (x-4)^2 + 3$  y  $y = -(x-4)^2 + 3$
  - (b) ¿Son iguales las dos gráficas? Explica.
  - (c) Utiliza tu calculadora para verificar tus dibujos.
6. A la Compañía de Exploración de Aceite del Noroeste le cuesta \$4,000,000 para montar su equipo y \$50 por pie para perforar el pozo petrolero.
  - (a) Escribe una ecuación que te de el costo total del montaje y perforación de un pozo ( $y$ ) como una función de profundidad ( $x$ ).
  - (b) Escribe una ecuación que te de el costo por pie ( $y$ ) como una función de profundidad ( $x$ ).
  - (c) Haz una gráfica de ambas ecuaciones. ¿Dónde (si alguna vez lo hacen) se intersecan las mismas?
  - (d) ¿Cuál es el costo por pie de un pozo de 2000 pies?