

Las funciones exponenciales y logaritmos

Capítulo 2

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección, podrás:

Reconocer una función exponencial

Identificar algunas de las propiedades de una función exponencial

Describir las características de una curva exponencial.

2.1 Explosiones matemáticas

En este capítulo vamos a investigar las funciones exponenciales y logarítmicas. Estos conceptos matemáticos tienen aplicaciones en la medida de los terremotos, la medida de la intensidad del sonido, y el análisis de los datos experimentales, por mencionar sólo algunos. De hecho, debes de haberte encontrado con algunas de estas ideas anteriormente sin darte cuenta de ello. Anteriormente en tus estudios encontraste un problema basado en llenar un tablero de ajedrez con granos de trigo.

Esta es una historia antigua encontrada en muchas versiones similares. De acuerdo a otra versión de la historia, el Rey Shirham de India quería recompensar a su Gran Visir, Sissa Ben Dahir, por inventar e introducirlo al juego de ajedrez. El Gran Visir le pidió al rey que colocara un grano de arroz en el primer cuadrado del tablero, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, y así sucesivamente, hasta que el tablero estuviera lleno de acuerdo a este patrón. El rey trató de persuadirlo de llevar a cabo dicha tontería, porque él estaba dispuesto a darle joyas o dinero, pero, para la sorpresa de todos, el Gran Visir se mantuvo firme. ¿Hizo él lo correcto?

Palabras para conocer: Una función definida por una ecuación como la siguiente $f(x) = a^x$ donde $a > 0$, $a \neq 1$ se le conoce como una *función exponencial*.

Por ejemplo, $y = 2^x$ y $y = 3^x$ son funciones exponenciales.

1. Usa tu calculadora para dibujar una gráfica de la función definida por $y = 2^x - 1$. Nota que $y = 2^x - 1$ es una forma de función exponencial. Indica el dominio, $0 \leq x \leq 64$ y el alcance, $0 \leq y \leq 100$. Tu gráfica se debe parecer algo a la gráfica de la Figura 2.2.

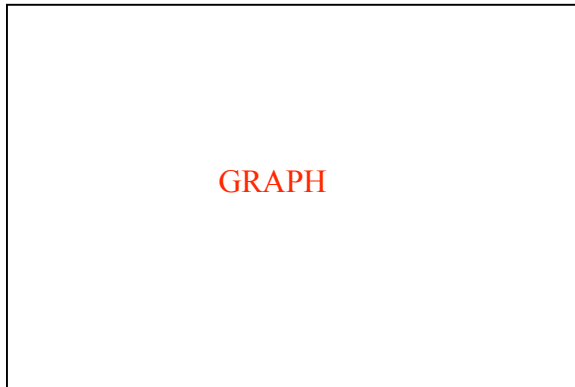


Figura 2.2

2. Nota que aunque nos gustaría ver qué sucede hasta los 64 cuadrados, tan pronto como x se vuelve 5 ó 6, el valor de y aumenta muy rápidamente, casi en una línea vertical. Una manera para ayudar en la solución de este problema es cambiar el alcance para el valor de y a una cifra más grande, digamos 100,000. Lleva a cabo este cambio, y entonces, dibuja de nuevo la gráfica de esta función.

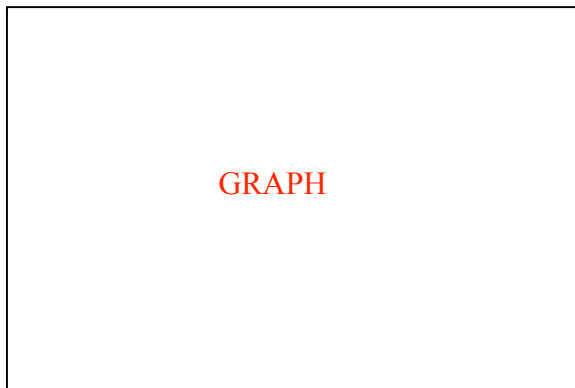


Figura 2.3

¿Sorprendido? Aun cuando hemos hecho los posibles valores de y mucho más grandes que antes para la muestra, de hecho, 1000 veces más grande, la apariencia de la gráfica no ha cambiado mucho.

Esta característica explosiva aumenta después que algún valor de x es característico de las curvas de crecimiento exponencial, y esto hace difícil el hacer gráficas de algunas curvas exponenciales. Más tarde en este capítulo aprenderemos algunas de las técnicas que los matemáticos han desarrollado para hacer frente a este tipo de explosiones matemáticas. Debido a que las funciones exponenciales envuelven exponentes, necesitamos revisar y extender las habilidades que aprendimos anteriormente para trabajar con exponentes.

Conjunto de ejercicios: 2.1



PHOTO

- (a) A tu amiga Nina le acaban de ofrecer una variedad de empleos. El primero comienza con un salario de \$31,600 con un aumento anual de \$1,200. El segundo también comienza con un salario de \$31,600, pero, tiene un aumento de salario de 3% anual. ¿Cuál trabajo tú le recomendarías a tu amiga que aceptara? Explica.

(b) Supongamos ahora que el primer trabajo comenzara con un salario de \$31,600, pero, tuviera un aumento anual de \$1,025 y el segundo tuviera un salario igual para comenzar, pero, tuviera un aumento anual de 2%. ¿Cuál trabajo tú le recomendarías a tu amiga que aceptara? Explica.
- Una fundación educativa ofrece darle a tu sistema escolar dinero para mejorar su acceso a la tecnología. Hay dos planes posibles para distribuir el dinero.

PLAN A. El sistema escolar va a recibir 20 millones de dólares en el acto.

PLAN B. Al sistema escolar se le asignará un centavo para el primer día del mes, dos centavos para el segundo día, cuatro centavos para el tercer día, ocho centavos para el cuarto día, y así sucesivamente. Este patrón de duplicación continuará durante todo el mes de enero. Al final de los 31 días, se le será entregará la cantidad acumulada al sistema escolar.

- (a) Calcula el valor del PLAN B. Explica cuál plan tú piensas que tu sistema escolar debe escoger.

- (b) En el mes de febrero del año 2005, esta misma fundación educacional hizo una oferta similar con una excepción. Este regalo en el acto del Plan A era de solamente 5 millones de dólares. Asumiendo que el PLAN B no cambie, con el dinero asignado para cada día del mes, calcula el valor del PLAN B. ¿Cuál plan representa una mejor alternativa? Explica.
- (c) En el mes de febrero del año 2004, a otro sistema escolar le fue ofrecido también ambas alternativas de 5 millones de dólares en el acto o un centavo duplicado para cada día del mes. ¿Cuál plan tú piensas que debe ser la mejor alternativa en este caso? Explica. (*Pista: ¡No te apresures a llegar a conclusiones erróneas!*)
3. Usa tu calculadora para hacer una gráfica para $f(x) = 10^x$ y $g(x) = x^{10}$ para $x \geq 0$.
- (a) ¿Cuál función aumenta más rápidamente?
- (b) ¿Para cuál(es) valor(es) de x (si alguno) es $f(x) > g(x)$?
- (c) ¿Para cuál(es) valor(es) de x (si alguno) es $g(x) > f(x)$?
- (d) ¿Para cuál(es) valor(es) de x (si alguno) es $f(x) = g(x)$?

